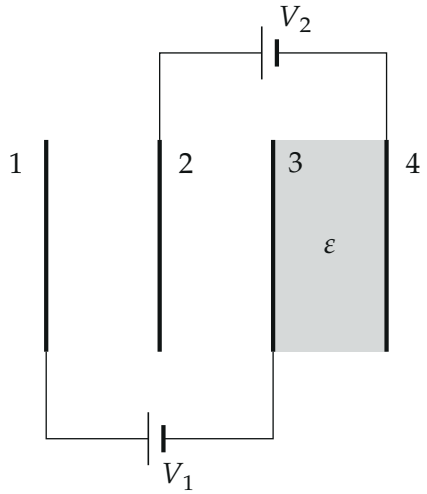
Четыре пластины с диэлектриком и две батареи

Задача 4. [Курчатов 2022/23, 11 класс, задача 4] Четыре одинаковые незаряженные металлические пластины расположены параллельно друг другу на равных расстояниях. Всё пространство между пластинами 3 и 4 заполнено твёрдым однородным диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 4$. Пластины 1 и 3 соединяют тонким проводом через батарею с ЭДС $V_1 = 12$ В, а пластины 2 и 4 — через батарею с ЭДС $V_2 = 4{,}5$ В. Найдите отношение $x = q_1/q_2$, где q_1 и q_2 — установившиеся заряды пластин 1 и 2.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на систему плоских конденсаторов, соединённых батареями. Каждая батарея переносит заряд с одной пластины на другую, поэтому пары пластин 1–3 и 2–4 электронейтральны в сумме. Поле в каждом промежутке находим по принципу суперпозиции полей заряженных плоскостей, напряжение батареи — сумма напряжений на промежутках между её пластинами. Получаем два линейных уравнения на два неизвестных заряда.

Обозначения. S — площадь пластин, d — расстояние между соседними; q_i — заряд пластины i, $\sigma_i = q_i/S$; ось x — от пластины 1 к пластине 4; E_{12}, E_{23}, E_{34} — проекции поля на ось x в трёх промежутках; φ_i — потенциал пластины i.

1. Заряды. Пластины сначала не заряжены, батарея V_1 лишь перекачивает заряд между пластинами 1 и 3, батарея V_2 — между 2 и 4 (закон сохранения заряда для каждой изолированной пары):

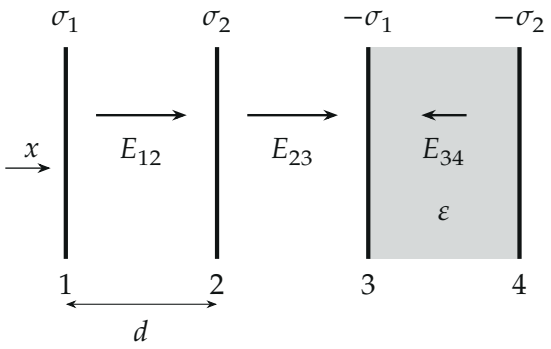
$$q_3 = -q_1, \qquad q_4 = -q_2.$$

Полярность батарей — по рисунку условия: длинная тонкая черта — плюс. У нижней батареи плюс к пластине 1, у верхней — к пластине 2:

$$\varphi_1 - \varphi_3 = V_1, \qquad \varphi_2 - \varphi_4 = V_2.$$

2. Поле в промежутках. Бесконечная плоскость с плотностью σ создаёт по обе стороны поле $\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, направленное от неё (при $\sigma > 0$). Сумма всех зарядов равна нулю, поэтому снаружи системы поле нулевое. Внутри удобнее применить теорему Гаусса: поле в промежутке определяется суммарным зарядом пластин слева от него, делённым на $\varepsilon_0 S$, а в диэлектрике ослабляется в ε раз:

$$E_{12} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}, \qquad E_{23} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\varepsilon_0}, \qquad E_{34} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_1}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$



Плотности зарядов пластин и поле в промежутках (направления — для найденных ниже знаков: $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$).

3. Напряжения батарей. Работа поля при переносе пробного заряда e вдоль оси x с пластины 1 на пластину 3 равна $e(\varphi_1 - \varphi_3) = e(E_{12} + E_{23})d$;

так же с пластины 2 на пластину 4:

$$V_1 = \frac{\sigma_1 d}{\varepsilon_0} + \frac{(\sigma_1+\sigma_2)d}{\varepsilon_0} \quad\Rightarrow\quad 2\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\varepsilon_0 V_1}{d},$$

$$V_2 = \frac{(\sigma_1+\sigma_2)d}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2 d}{\varepsilon_0\varepsilon} \quad\Rightarrow\quad \varepsilon\sigma_1 + (\varepsilon+1)\sigma_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon V_2}{d}.$$

4. Решение системы. Из первого уравнения $\sigma_2 = \frac{\varepsilon_0 V_1}{d} - 2\sigma_1$; подставляем во второе:

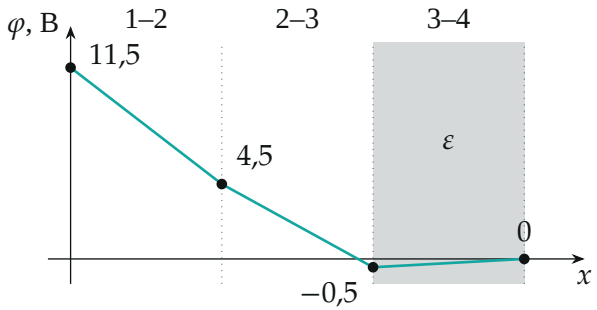
$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon_0}{d}\cdot\frac{(\varepsilon+1)V_1 - \varepsilon V_2}{\varepsilon+2}, \qquad \sigma_2 = \frac{\varepsilon_0}{d}\cdot\frac{\varepsilon(2V_2 - V_1)}{\varepsilon+2}.$$

Отношение зарядов равно отношению плотностей:

$$x = \frac{q_1}{q_2} = \frac{(\varepsilon+1)V_1 - \varepsilon V_2}{\varepsilon(2V_2 - V_1)} = \frac{5\cdot 12 - 4\cdot 4{,}5}{4\,(9-12)} = \frac{42}{-12} = -3{,}5.$$

Минус: заряд пластины 2 отрицателен, хотя к ней подключён плюс батареи V_2.

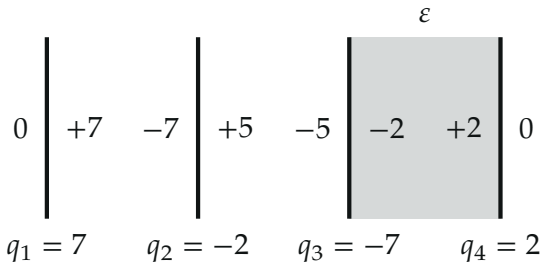
5. Картина потенциала. В единицах ε_0/d: $\sigma_1 = 7$ В, $\sigma_2 = -2$ В. Напряжения на промежутках: $E_{12}d = 7$ В, $E_{23}d = 5$ В, $E_{34}d = -0{,}5$ В. Примем $\varphi_4 = 0$: $\varphi_3 = -0{,}5$ В, $\varphi_2 = 4{,}5$ В, $\varphi_1 = 11{,}5$ В (рисунок 3). Проверяем: $\varphi_1 - \varphi_3 = 12$ В, $\varphi_2 - \varphi_4 = 4{,}5$ В.



Потенциал вдоль системы (посчитан по найденным зарядам). Наклон в каждом промежутке — поле; в диэлектрике поле мало и направлено против

оси.

Заряды на поверхностях пластин (в тех же единицах) показывает рисунок 4: на обращённых друг к другу поверхностях соседних пластин заряды равны по модулю и противоположны по знаку, внешние поверхности пластин 1 и 4 не заряжены. В диэлектрике свободный заряд ∓ 2 создаёт поле в $\varepsilon = 4$ раза слабее: $2/4 = 0{,}5$ В.



Заряды поверхностей пластин в единицах $\varepsilon_0 S \cdot (1\ \text{В})/d$. Сумма по каждой пластине — её заряд, сумма по парам $1,3$ и $2,4$ — нуль.

Обратите внимание. Нельзя считать, что каждая батарея «заряжает свой конденсатор» независимо: промежуток 2–3 входит в обе цепи, и заряды пластин связаны. Полярность батарей важна: при обратном подключении V_2 знак в уравнении сменится и ответ будет другим.

Ответ: $x = \dfrac{(\varepsilon+1)V_1 - \varepsilon V_2}{\varepsilon(2V_2 - V_1)} = -3{,}5$.

Проверка. Предел $V_2 \to 0$ (пластины 2 и 4 соединены проводом): $x = -\dfrac{\varepsilon+1}{\varepsilon}$, то есть $q_2 = -\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon+1}q_1$ — как и должно быть: напряжение между 2 и 4 нулевое, $E_{23}d = -E_{34}d$, $(\sigma_1 + \sigma_2) = -\sigma_2/\varepsilon$. Предел $\varepsilon \to \infty$ (промежуток 3–4 как проводник): $x = \dfrac{V_1 - V_2}{2V_2 - V_1}$; тогда $\varphi_3 = \varphi_4$ и задача сводится к двум конденсаторам — то же получается напрямую. Отношение безразмерно.

Ответ. $x = \dfrac{(\varepsilon+1)V_1 - \varepsilon V_2}{\varepsilon(2V_2 - V_1)} = -3{,}5$ (заряд пластины 2 отрицателен).