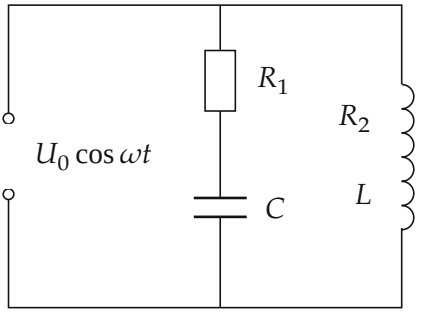
Две параллельные ветви переменного тока

Задача 5. [Курчатов 2022/23, 11 класс, задача 5] Цепь переменного тока состоит из двух параллельных ветвей. Первая ветвь — сопротивление $R_1 = 2{,}5$ кОм и конденсатор ёмкостью $C = 4$ мкФ, вторая — катушка сопротивлением $R_2 = 0{,}1$ кОм и индуктивностью $L = 0{,}15$ Гн. На вход цепи подаётся напряжение $U_0 \cos \omega t$ с амплитудой $U_0 = 12$ В и круговой частотой $\omega = 2\pi\nu$, где $\nu = 50$ Гц. В установившемся режиме ток I_1, текущий через конденсатор, периодически обращается в нуль. Найдите, чему в этом случае равно абсолютное значение тока I_2, текущего через катушку.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на цепь гармонического тока с параллельными ветвями. Обе ветви под одним и тем же напряжением, но токи в них сдвинуты по фазе: в ветви с конденсатором ток опережает напряжение, в катушке — отстаёт. Удобно изображать колебания вращающимися векторами (векторная диаграмма): мгновенное значение — проекция вектора на горизонтальную ось. Когда $I_1 = 0$, вектор тока первой ветви вертикален, и мгновенный ток катушки — проекция её вектора, повёрнутого на угол сдвига фаз между токами.

Обозначения. I_{1A}, I_{2A} — амплитуды токов ветвей; φ_1 — на сколько ток I_1 опережает напряжение, φ_2 — на сколько ток I_2 отстаёт; $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$, $X_L = \omega L$ — реактивные сопротивления.

1. Первая ветвь. Через R_1 и C течёт один ток. Напряжение на резисторе совпадает с ним по фазе (амплитуда $I_{1A}R_1$), на конденсаторе отстаёт

на 90° (амплитуда $I_{1A}X_C$). Их векторная сумма — приложенное напряжение U_0 (рисунок 2, слева). По теореме Пифагора и из треугольника:

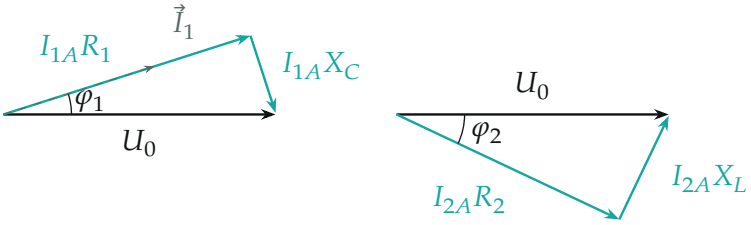
$$I_{1A} = \frac{U_0}{\sqrt{R_1^2 + X_C^2}}, \qquad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{X_C}{R_1} = \frac{1}{\omega C R_1}.$$

Числа: $X_C = \dfrac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 4 \cdot 10^{-6}} = 796$ Ом, $\operatorname{tg}\varphi_1 = 0{,}318$, $\varphi_1 = 17{,}7°$, $I_{1A} = 4{,}57$ мА.

2. Вторая ветвь. Катушка — резистор R_2 и индуктивность L последовательно. Напряжение на индуктивности опережает ток на 90° (рисунок 2, справа):

$$I_{2A} = \frac{U_0}{\sqrt{R_2^2 + X_L^2}}, \qquad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{X_L}{R_2} = \frac{\omega L}{R_2}.$$

Числа: $X_L = 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}15 = 47{,}1$ Ом, $\operatorname{tg}\varphi_2 = 0{,}471$, $\varphi_2 = 25{,}2°$, $I_{2A} = \dfrac{12}{110{,}5}$ А$= 108{,}6$ мА.

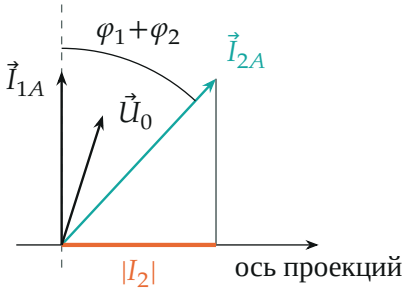


Треугольники напряжений ветвей (векторы — амплитуды, построены в масштабе: 11,4 и 3,6 В; 10,9 и 5,1 В). Ток ветви направлен вдоль вектора напряжения на её резисторе.

3. Момент, когда $I_1 = 0$. На общей векторной диаграмме токов (рисунок 3) вектор $\vec{I}_{1A}$ повёрнут от $\vec{U}_0$ на φ_1 против часовой стрелки, вектор $\vec{I}_{2A}$ — на φ_2 по часовой. Угол между векторами токов равен $\varphi_1 + \varphi_2$. Вся диаграмма вращается с угловой скоростью ω; ток I_1 равен нулю, когда $\vec{I}_{1A}$ перпендикулярен оси проекций. В этот момент $\vec{I}_{2A}$ составляет с осью проекций угол $90° - (\varphi_1 + \varphi_2)$, и мгновенный ток катушки по

модулю

$$|I_2| = I_{2A}\cos(90^\circ - \varphi_1 - \varphi_2) = I_{2A}\sin(\varphi_1 + \varphi_2).$$

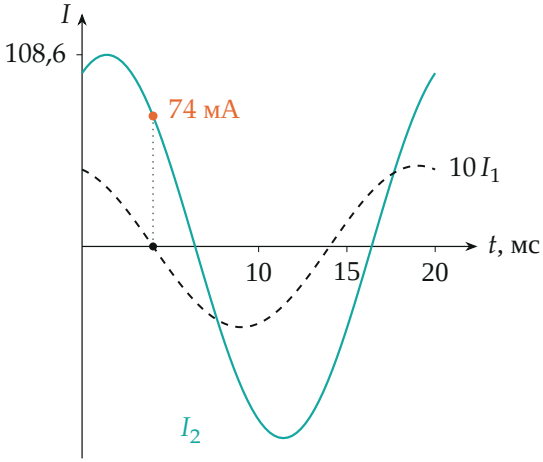


Векторная диаграмма токов в момент $I_1 = 0$: вектор $\vec{I}_{1A}$ вертикален, проекция $\vec{I}_{2A}$ на ось — мгновенный ток катушки. Напряжение $\vec{U}_0$ лежит между токами: от $\vec{I}_{1A}$ на φ_1, от $\vec{I}_{2A}$ на φ_2.

4. Числа. $\varphi_1 + \varphi_2 = 17{,}7^\circ + 25{,}2^\circ = 42{,}9^\circ$, $\sin 42{,}9^\circ = 0{,}681$:

$$|I_2| = \frac{U_0}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}}\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = 108{,}6\text{ мА} \cdot 0{,}681 \approx 74\text{ мА}.$$

Тот же результат даёт прямой счёт мгновенных токов $I_1 = I_{1A}\cos(\omega t + \varphi_1)$, $I_2 = I_{2A}\cos(\omega t - \varphi_2)$: $I_1 = 0$ при $\omega t = 90^\circ - \varphi_1$, тогда $I_2 = I_{2A}\cos(90^\circ - \varphi_1 - \varphi_2)$ (рисунок 4, $t = 4{,}0$ мс).



Токи ветвей за период 20 мс (по формулам; ток I_1 увеличен в 10 раз, амплитуда 4,57 мА). В момент $t = 4{,}0$ мс ток I_1 проходит через нуль, а $I_2 = 74$ мА.

Обратите внимание. Спрашивается мгновенное значение тока катушки, а не амплитуда: 74 мА меньше $I_{2A} = 108{,}6$ мА. Через полпериода I_1 снова обращается в нуль, и $I_2 = -74$ мА — поэтому в ответе модуль.

Ответ: $|I_2| = \dfrac{U_0}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}} \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \approx 74$ мА, где $\operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{1}{\omega C R_1}$, $\operatorname{tg}\varphi_2 = \dfrac{\omega L}{R_2}$.

Проверка. Размерность: В/Ом = А. Предел $C \to \infty$, $L \to 0$ (обе ветви — чистые резисторы): $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, токи в фазе и обращаются в нуль одновременно, $|I_2| = 0$ — формула даёт то же. Предел чисто реактивных ветвей ($R_1, R_2 \to 0$): токи в противофазе, $\varphi_1 + \varphi_2 = 180°$, снова $I_2 = 0$ при $I_1 = 0$ — верно.

Ответ. $|I_2| = \dfrac{U_0}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}} \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \approx 74$ мА, где $\operatorname{tg}\varphi_1 = \dfrac{1}{\omega C R_1}$, $\operatorname{tg}\varphi_2 = \dfrac{\omega L}{R_2}$.