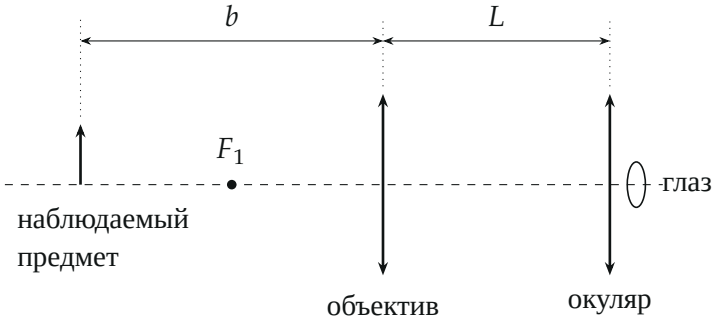
Микроскоп

Задача 6. [Курчатов 2022/23, 11 класс, задача 6] Микроскоп состоит из объектива — собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 0{,}5$ см и окуляра — собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_2 = 5$ см. Наблюдаемый предмет находится на расстоянии $b = 0{,}52$ см от объектива. Считая, что глаз наблюдателя расположен вплотную к окуляру и аккомодирован на расстояние наилучшего зрения $d = 20$ см, найдите следующие величины:

1. расстояние L между объективом и окуляром;
2. угловое увеличение микроскопа $k = \beta/\alpha$, где β — угол, под которым наблюдатель видит предмет в микроскоп, α — угол, под которым наблюдатель видит тот же предмет невооружённым глазом. В обоих случаях глаз аккомодирован на расстояние наилучшего зрения.

Все углы считайте малыми. Подсказка: объектив микроскопа строит изображение предмета, которое наблюдатель рассматривает в окуляр как в лупу.

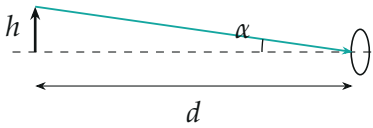


▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на оптическую систему из двух линз. Объектив — короткофокусная линза, предмет чуть дальше его фокуса, поэтому объектив даёт далёкое увеличенное действительное изображение. Это изображение глаз рассматривает через окуляр как через лупу: окуляр даёт мнимое изображение на расстоянии d от глаза. Оба шага — формула тонкой линзы, увеличение — отношение малых углов.

Обозначения. h — высота предмета; x — расстояние от объектива до его изображения, h_1 — высота этого изображения; y — расстояние от этого изображения до окуляра; α, β — углы зрения без микроскопа и с ним.

1. Без микроскопа. Предмет высотой h на расстоянии d виден под углом (рисунок 2)

$$\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{d}.$$



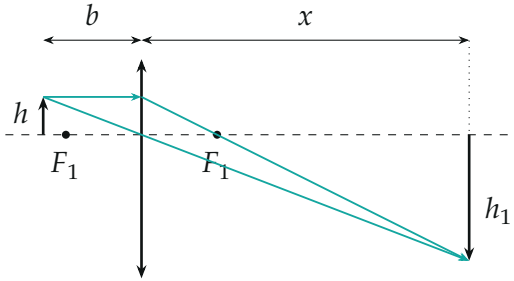
Предмет на расстоянии наилучшего зрения без микроскопа.

2. Объектив. Формула тонкой собирающей линзы для объектива (предмет и изображение действительные):

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{F_1} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{bF_1}{b - F_1} = \frac{0{,}52 \cdot 0{,}5}{0{,}02} = 13 \text{ см}.$$

Луч через оптический центр не преломляется, из подобных треугольников (рисунок 3) высота перевёрнутого изображения

$$h_1 = h\frac{x}{b} = \frac{hF_1}{b - F_1} = 25\,h.$$



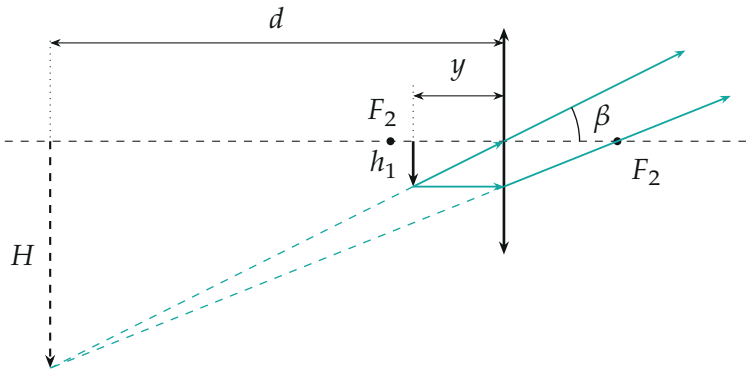
Объектив: изображение предмета, построенное двумя лучами (не в масштабе: на самом деле $x = 25b$).

3. Окуляр как лупа. Изображение h_1 должно оказаться между окуляром и его фокусом: тогда окуляр даёт мнимое прямое изображение (относительно h_1) на расстоянии d перед глазом, и глаз, аккомодированный на d, видит его чётко. Формула тонкой линзы для мнимого изображения (расстояние до него со знаком минус):

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{d} = \frac{1}{F_2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{dF_2}{d + F_2} = \frac{20 \cdot 5}{25} = 4 \text{ см} < F_2.$$

Глаз у самого окуляра, поэтому угол зрения — угол луча через центр окуляра (рисунок 4). Этот луч идёт от вершины h_1 и от вершины мнимого изображения одновременно:

$$\beta \approx \frac{h_1}{y} = \frac{hF_1}{(b - F_1)} \cdot \frac{d + F_2}{dF_2}.$$



Окуляр-лупа: изображение h_1 внутри фокуса даёт мнимое изображение H на расстоянии d; продолжения лучей — пунктир. Глаз — вплотную к окуляру справа. Масштаб единый: $y = 4$, $F_2 = 5$, $d = 20$ см.

Пункт 1. Расстояние между линзами — сумма расстояний от объек-

тива до промежуточного изображения и от него до окуляра:

$$L = x + y = \frac{bF_1}{b - F_1} + \frac{dF_2}{d + F_2} = 13 + 4 = 17 \text{ см}.$$

Пункт 2. Делим β на $\alpha = h/d$:

$$k = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{F_1}{b - F_1} \cdot \frac{d + F_2}{F_2} = \frac{F_1}{b - F_1}\left(\frac{d}{F_2} + 1\right) = 25 \cdot 5 = 125.$$

Увеличение — произведение линейного увеличения объектива ($x/b = 25$) и углового увеличения окуляра-лупы ($d/y = 5$).

Обратите внимание. Глаз аккомодирован на d, а не на бесконечность, поэтому промежуточное изображение стоит не в фокусе окуляра, а ближе ($y = 4$ см, а не 5). При аккомодации на бесконечность увеличение окуляра было бы $d/F_2 = 4$, а не 5.

Ответ: 1) $L = \dfrac{bF_1}{b - F_1} + \dfrac{dF_2}{d + F_2} = 17$ см; 2) $k = \dfrac{F_1}{b - F_1}\left(\dfrac{d}{F_2} + 1\right) = 125$.

Проверка. Второй способ для k: линейное увеличение всей системы $H/h = \dfrac{x}{b} \cdot \dfrac{d}{y} = 25 \cdot 5 = 125$; изображение H стоит на том же расстоянии d, что и предмет без микроскопа, поэтому отношение углов равно отношению высот — 125. Предел $b \to F_1$: изображение объектива уходит на бесконечность, $L \to \infty$, $k \to \infty$ — верно.

Ответ. 1) $L = \dfrac{bF_1}{b - F_1} + \dfrac{dF_2}{d + F_2} = 17$ см; 2) $k = \dfrac{F_1}{b - F_1}\left(\dfrac{d}{F_2} + 1\right) = 125$.