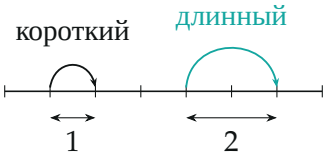
Кузнечик Вероники

Задача 1. [Курчатов 2022/23, 7 класс, задача 1] Юный зоолог Вероника проводит серию экспериментов с кузнечиком. Она помещает его на дорожку с нанесёнными на неё делениями разметки и измеряет среднюю скорость его движения за определённый промежуток времени, одинаковый для всех экспериментов. Кузнечик умеет делать длинные прыжки, перемещаясь на два деления за один прыжок, и короткие прыжки, перемещаясь за один прыжок всего на одно деление. В любом случае кузнечик тратит на прыжок одну секунду.

В первом эксперименте кузнечик совершил некоторое количество длинных и коротких прыжков, при этом средняя скорость его движения оказывается равной $5/4$ деления в секунду. Во втором эксперименте кузнечик совершил столько длинных прыжков, сколько коротких прыжков он совершил в первом эксперименте, при этом средняя скорость его продвижения оказывается равной $7/4$ деления в секунду. Какой окажется его средняя скорость в третьем эксперименте, если в нём он совершил в два раза меньше коротких прыжков, чем в первом эксперименте? Ответ округлите до тысячных.



Поясняющий рисунок: короткий прыжок — одно деление, длинный — два; каждый длится 1 *с.*

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на среднюю скорость: весь путь, делённый на всё время. Главная идея — скрытое в условии постоянство: время опыта одинаково, а каждый прыжок длится секунду, значит, *общее число прыжков во всех опытах одно и то же*. Отдельно числа прыжков найти нельзя, но средняя скорость зависит только от долей коротких и длинных прыжков — их и найдём из первых двух опытов.

Обозначения. В первом опыте m коротких и n длинных прыжков; общее число прыжков $N = m + n$ — одно на все опыты, время опыта N с. Доли: $\alpha = \dfrac{m}{N}$ коротких, $\beta = \dfrac{n}{N}$ длинных, $\alpha + \beta = 1$.

1. Опыт 1. Средняя скорость — путь в делениях, делённый на время: короткие прыжки дают m делений, длинные $2n$:

$$v_1 = \frac{m + 2n}{m + n} = \alpha + 2\beta = \frac{5}{4}.$$

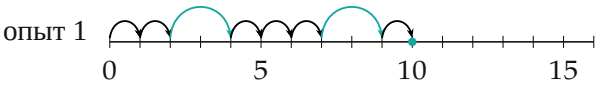
2. Опыт 2. Длинных прыжков теперь m (столько, сколько было коротких в первом). Время то же, значит, всего прыжков снова N, и коротких $N - m = n$:

$$v_2 = \frac{n + 2m}{m + n} = 2\alpha + \beta = \frac{7}{4}.$$

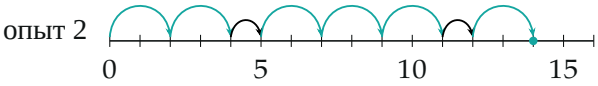
3. Доли прыжков. Сложим уравнения: $3(\alpha+\beta) = 3$, то есть $\alpha+\beta = 1$ — согласуется с определением долей. Вычтем первое из второго: $\alpha-\beta = \frac{1}{2}$. Отсюда

$$\alpha = \frac{3}{4}, \qquad \beta = \frac{1}{4}.$$

В первом опыте три четверти прыжков короткие. Например, при $N = 8$ это 6 коротких и 2 длинных: путь 10 делений за 8 с, $v_1 = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$ (рисунок 2). Во втором — 6 длинных и 2 коротких: 14 делений, $v_2 = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$ (рисунок 3).



Опыт 1 при $N = 8$ прыжках: 6 коротких (чёрные) и 2 длинных (бирюзовые), путь 10 делений.



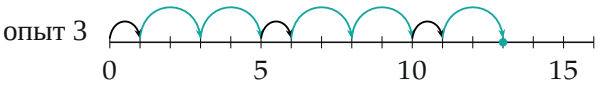
Опыт 2: длинных столько, сколько было коротких, — 6; путь 14 делений за те же 8 с.

4. Опыт 3. Коротких прыжков вдвое меньше, чем в первом: $\frac{m}{2}$. Всего прыжков по-прежнему N, значит, длинных $N - \frac{m}{2} = n + \frac{m}{2}$. Путь:

$$\frac{m}{2} + 2\left(n + \frac{m}{2}\right) = \frac{3}{2}m + 2n,$$

$$v_3 = \frac{\frac{3}{2}m + 2n}{m + n} = \frac{3}{2}\alpha + 2\beta = \frac{9}{8} + \frac{1}{2} = \frac{13}{8} = 1{,}625 \text{ дел/с}.$$

При $N = 8$: 3 коротких и 5 длинных, путь 13 делений за 8 с (рисунок 4).



Опыт 3: коротких вдвое меньше, чем в опыте 1, — 3, длинных 5; путь 13 делений за 8 с.

Обратите внимание. Во втором и третьем опытах меняется не только число прыжков одного вида: раз время то же, недостающие прыжки становятся прыжками другого вида. Без этого (если считать, что длинных в опыте 3 столько же, n) время опыта изменилось бы, а это противоречит условию.

Проверка. Ответ лежит между 1 и 2 дел/с, как и должно быть для смеси прыжков по 1 и 2 деления. Опыт 3 по сравнению с опытом 1 заменил $\frac{m}{2} = \frac{3}{8}N$ коротких прыжков на длинные, и каждый добавил одно деление: $v_3 = v_1 + \frac{3}{8} = \frac{5}{4} + \frac{3}{8} = \frac{13}{8}$ — второй способ дал то же.

Смысл: в третьем опыте длинных прыжков больше, чем в первом, но меньше, чем во втором, поэтому и скорость промежуточная: $1{,}25 < 1{,}625 < 1{,}75$.

Ответ. $v_3 = \frac{3}{2}\alpha + 2\beta = \frac{13}{8} = 1{,}625$ дел/с, где $\alpha = \frac{3}{4}$ и $\beta = \frac{1}{4}$ — доли коротких и длинных прыжков в первом опыте.