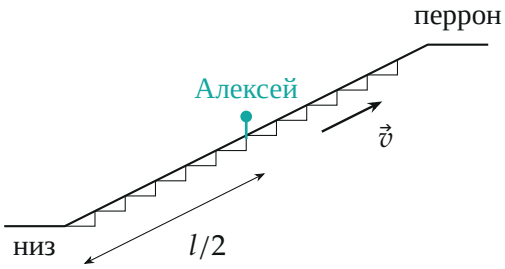
Эскалатор на вокзале

Задача 2. [Курчатов 2022/23, 7 класс, задача 2] Алексей, стоя неподвижно на эскалаторе, поднимается на перрон. Проехав таким образом половину пути, он понял, что перепутал номер платформы. Он решил пойти в направлении, обратном движению эскалатора, чтобы сэкономить время. Если бы эскалатор не двигался, то Алексей спустился бы за 1 минуту. Принимая во внимание, что эскалатор на вокзале поднимает неподвижно стоящего человека на платформу за 3 минуты, рассчитайте, сколько времени потерял Алексей, воспользовавшись неподходящим эскалатором?



Поясняющий рисунок: эскалатор длиной l движется вверх со скоростью v; Алексей проехал половину и повернул вниз.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на сложение скоростей. Пока Алексей стоит, его скорость относительно земли — скорость эскалатора вверх. Когда он идёт вниз по движущимся ступеням, его скорость относительно земли — разность его скорости относительно ступеней и скорости эскалатора. В итоге Алексей оказывается внизу, там же, откуда начал: всё время, проведённое на этом эскалаторе, потеряно.

Обозначения. l — длина эскалатора; $t_0 = 3$ мин — время подъёма стоя; $t_1 = 1$ мин — время спуска пешком по неподвижному эскалатору от места, где Алексей повернул (с середины, то есть путь $l/2$); v — скорость эскалатора; u — скорость Алексея относительно ступеней. Ось x — вдоль эскалатора вверх, начало внизу.

1. Скорость эскалатора. Стоящего человека эскалатор поднимает на всю длину за t_0:

$$v = \frac{l}{t_0} = \frac{l}{3\text{ мин}}.$$

2. Скорость Алексея относительно ступеней. По неподвижному эскалатору он прошёл бы половину длины за t_1:

$$u = \frac{l/2}{t_1} = \frac{l}{2\text{ мин}}.$$

Он идёт быстрее, чем едет эскалатор ($u > v$), — спуститься против движения получится.

3. Подъём до середины. Стоя на ступенях, Алексей движется со скоростью v и проезжает $l/2$ за

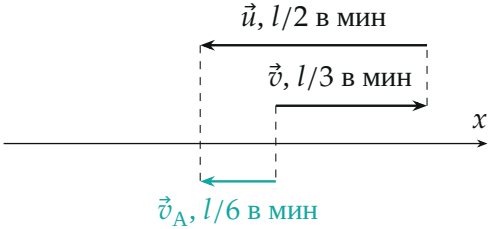
$$\tau_1 = \frac{l/2}{v} = \frac{t_0}{2} = 1{,}5\text{ мин}.$$

4. Спуск против движения. Закон сложения скоростей: скорость Алексея относительно земли равна его скорости относительно ступеней плюс скорость ступеней, $\vec{v}_\text{A} = \vec{u} + \vec{v}$ (рисунок 2). В проекции на ось x (вверх): $u_x = -u$, $v_x = v$, поэтому

$$v_{\text{A}x} = -u + v = -\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{3}\right)\frac{1}{\text{мин}} = -\frac{l}{6\text{ мин}}.$$

Минус: Алексей движется вниз, со скоростью $\frac{l}{6}$ в минуту. Путь $l/2$ до низа он проходит за

$$\tau_2 = \frac{l/2}{u - v} = \frac{l/2}{l/6}\text{ мин} = 3\text{ мин}.$$



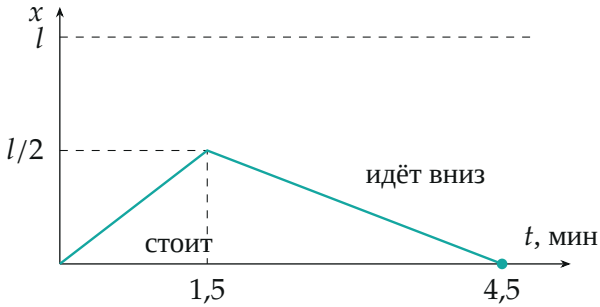
Сложение скоростей при спуске (длины в масштабе): $\vec{v}_A = \vec{u} + \vec{v}$ направлена

вниз и в 3 раза меньше $\vec{u}$.

5. Потерянное время. В момент $\tau_1 + \tau_2$ Алексей снова внизу, в исходной точке — как будто на этот эскалатор не вставал. Значит, потеряно всё время на нём:

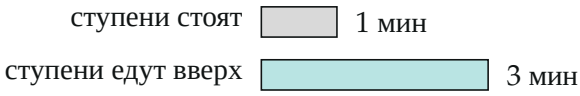
$$\Delta t = \tau_1 + \tau_2 = \frac{t_0}{2} + \frac{l/2}{\frac{l}{2t_1} - \frac{l}{t_0}} = \frac{t_0}{2} + \frac{t_0 t_1}{t_0 - 2t_1} = 1{,}5 + 3 = 4{,}5 \text{ мин}.$$

Длина l сократилась — она и не нужна. График координаты — на рисунке 3.



Координата Алексея вдоль эскалатора: подъём стоя со скоростью $l/3$ в минуту, затем спуск со скоростью $l/6$ в минуту; через 4,5 мин он снова внизу.

Для сравнения (рисунок 4): если бы ступени стояли, на тот же путь от середины до низа ушла бы 1 мин, а против движения — 3 мин: эскалатор «отнимает» у каждой минуты ходьбы две трети.



Время спуска с середины эскалатора пешком: по стоящим ступеням и против их движения.

Обратите внимание. Скорость Алексея относительно земли при спуске — не u, а $u - v$: ступени везут его назад. Именно поэтому спуск длится не 1, а 3 минуты.

Проверка. Размерность: $\frac{t_0 t_1}{t_0 - 2t_1}$ — минуты. Предел: если эскалатор стоит ($t_0 \to \infty$), второе слагаемое стремится к t_1 — спуск занимает ровно минуту, как и сказано. Если бы $t_0 = 2t_1$ ($u = v$), Алексей шёл бы на месте и время спуска стало бы бесконечным — знаменатель обращается в ноль, всё согласовано. Подстановка: $\frac{l}{3} \cdot 1{,}5 = \frac{l}{2}$ вверх, $\frac{l}{6} \cdot 3 = \frac{l}{2}$ вниз — вернулся в начало.

Смысл: решение «сэкономить время» обошлось Алексею в 4,5 минуты — больше, чем весь подъём по эскалатору (3 мин).

Ответ. $\Delta t = \dfrac{t_0}{2} + \dfrac{t_0 t_1}{t_0 - 2t_1} = 4{,}5$ мин, где $t_0 = 3$ мин, $t_1 = 1$ мин.