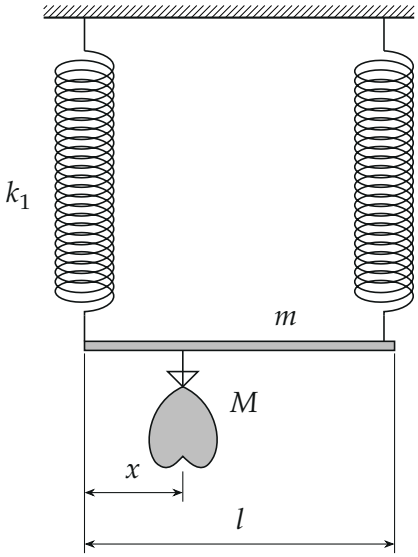
Стержень на двух пружинах

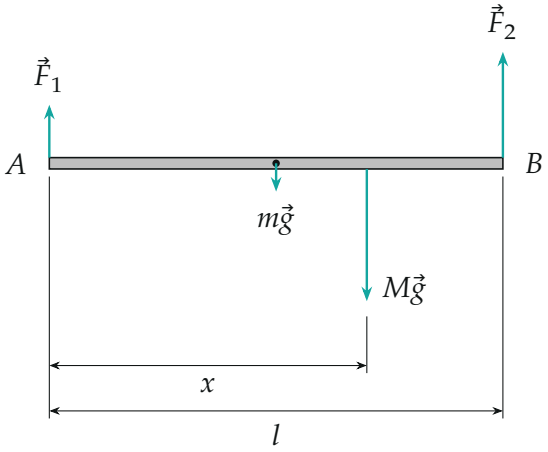
Задача 3. [Курчатов 2022/23, 7 класс, задача 3] Две пружины пренебрежимо малого веса с жёсткостями $k_1 = 16$ Н/м и $k_2 = 32$ Н/м прикреплены к потолку. Концы пружин соединены однородным стержнем постоянного сечения длиной $l = 20$ см и массой $m = 100$ г. К стержню подвешен мешок массой $M = 500$ г. Определите расстояние от левого края стержня до точки $x \in [0; l]$, в которой закреплён мешок, если известно, что стержень удерживается в горизонтальном положении. Ускорение свободного падения $g = 10$ Н/кг.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие рычага на упругих опорах. Стержень горизонтален, значит, концы пружин опустились одинаково — удлинения пружин равны (пружины одинаковой длины, как на рисунке). Тогда силы упругости относятся как жёсткости: правая, вдвое более жёсткая, тянет вдвое сильнее. Мешок должен висеть ближе к правой пружине. Положение мешка найдём из правила моментов.

Обозначения. F_1, F_2 — силы упругости левой и правой пружин, действующие на стержень (вверх); Δy — одинаковое удлинение пружин.

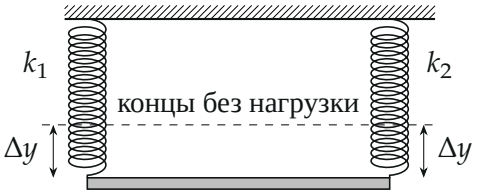
Мешок висит на нити, натяжение которой равно Mg: мешок покоится. Ось y — вверх.



Силы на стержень (длины стрелок — по найденным значениям): $F_1 = 2$ Н, $F_2 = 4$ Н, $mg = 1$ Н, $Mg = 5$ Н.

1. Отношение сил упругости. По закону Гука (рисунок 3) $F_1 = k_1\Delta y$, $F_2 = k_2\Delta y$ с одним и тем же Δy:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{2}.$$



Стержень горизонтален — оба конца опустились на одно и то же Δy.

2. Сумма сил. Первый закон Ньютона для стержня в проекции на ось y (силы — на рисунке 2):

$$F_1 + F_2 - mg - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 + F_2 = (m + M)g = 6\text{ Н}.$$

Вместе с пунктом 1: $F_1 = \frac{k_1}{k_1+k_2}(m+M)g = 2$ Н, $F_2 = \frac{k_2}{k_1+k_2}(m+M)g = 4$ Н.

3. Правило моментов относительно левого конца A. Ось через A выбрана, чтобы неизвестная сила F_1 выпала: её плечо равно нулю. Сила тяжести стержня приложена в его середине (стержень однородный), плечо $l/2$; натяжение нити мешка — плечо x; сила F_2 — плечо l:

$$F_2\, l = mg\,\frac{l}{2} + Mg\,x,$$

откуда

$$x = \frac{F_2\, l - mg\, l/2}{Mg} = \frac{4\cdot 0{,}2 - 1\cdot 0{,}1}{5}\ \text{м} = 0{,}14\ \text{м}.$$

В общем виде, подставив F_2:

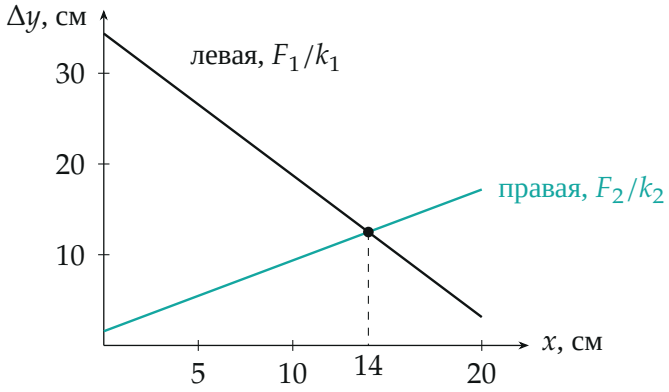
$$x = \frac{l}{Mg}\left(\frac{k_2(m+M)g}{k_1+k_2} - \frac{mg}{2}\right) = \frac{k_2(2M+m) - k_1 m}{2M(k_1+k_2)}\, l.$$

Получилось $x = 14$ см $< l$ — точка внутри стержня, как и требует условие.

4. Второй способ — моменты относительно обоих концов. Относительно B (выпадает F_2): $F_1 l = Mg(l-x) + mg\frac{l}{2}$. Относительно A: $F_2 l = Mgx + mg\frac{l}{2}$. Делим каждое на жёсткость и приравниваем удлинения $\frac{F_1}{k_1} = \frac{F_2}{k_2}$ (рисунок 4):

$$\frac{Mg(l-x) + mgl/2}{k_1 l} = \frac{Mgx + mgl/2}{k_2 l}.$$

Подстановка $x = 0{,}14$ м: слева $\frac{5\cdot 0{,}06+0{,}1}{16\cdot 0{,}2} = 0{,}125$ м, справа $\frac{5\cdot 0{,}14+0{,}1}{32\cdot 0{,}2} = 0{,}125$ м — удлинения равны, по 12,5 см.



Удлинения пружин, которые были бы при разных положениях мешка x (по правилу моментов). Стержень горизонтален, только где они равны — при $x = 14$ см.

Обратите внимание. Правило моментов само по себе даёт силы при любом x — стержень на двух опорах уравновешен всегда. Положение мешка задаёт только условие «стержень горизонтален», то есть равенство удлинений. Без него задача не решается.

Проверка. Размерность: $\frac{(\text{Н/м})\cdot\text{кг}}{\text{кг}\cdot\text{Н/м}}\cdot\text{м}$ — метры. Предел: при равных пружинах $k_1 = k_2$ формула даёт $x = \frac{2M}{4M}l = \frac{l}{2}$ — мешок посередине, по симметрии верно.

Смысл: правая пружина вдвое жёстче, поэтому она должна держать вдвое больше — мешок сдвинут к ней, на 14 см от левого края.

Ответ. $x = \dfrac{k_2(2M+m) - k_1 m}{2M(k_1+k_2)}\,l = 14$ см.