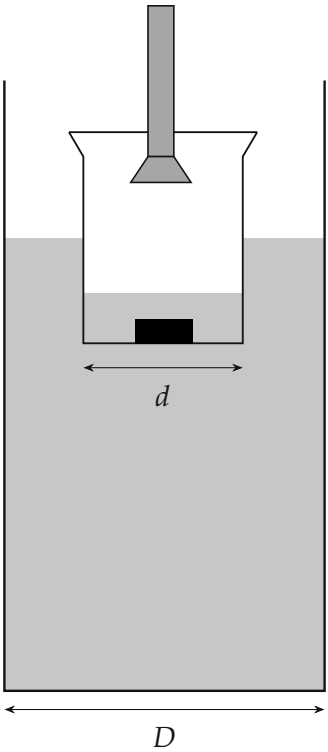
Стакан, наполняемый из распылителя

Задача 4. [Курчатов 2022/23, 7 класс, задача 4] В сосуд цилиндрической формы с диаметром $D = 10$ см налита вода до высоты $h = 20$ см. Утяжелённый небольшим грузом стакан с диаметром $d = 6$ см и общей массой с грузом $m = 150$ г помещают в сосуд с водой, как показано на рисунке. Каждую секунду в стакан с помощью распылителя добавляют $\Delta m = 10$ г воды с пренебрежимо малой высоты. Ускорение свободного падения $g = 10$ Н/кг. Плотность воды $\rho_в = 1$ г/см^3. Объём цилиндра высоты L и радиуса R можно вычислить по формуле $V_ц = \pi R^2 L$.



1. С какой скоростью v будет двигаться стакан относительно дна сосуда?
2. За какое время t стакан полностью погрузится в воду, если его высота $H = 10$ см?

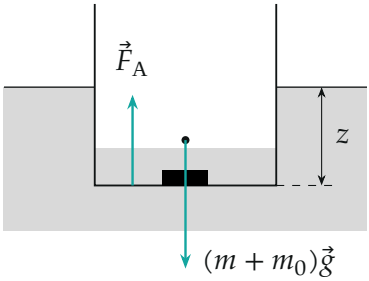
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на плавание тел. Стакан с грузом и налитой водой плавает: сила Архимеда равна их общему весу. Каждую секунду вес растёт на $\Delta m\, g$ — и глубина погружения растёт на одну и ту же величину, то есть стакан погружается равномерно. Но относительно дна сосуда он опускается медленнее: вытесненная им вода поднимает уровень в сосуде. Стакан «тонет» навстречу поднимающейся воде.

Обозначения. $S_d = \frac{\pi d^2}{4}$ — площадь дна стакана, $S_D = \frac{\pi D^2}{4}$ — площадь сечения сосуда; m_0 — масса воды, налитой в стакан к данному моменту; z — глубина погружения стакана (от уровня воды в сосуде до дна стакана); $\Delta t = 1$ с; за Δt глубина растёт на Δz, уровень воды в сосуде поднимается на ΔL, стакан опускается относительно дна сосуда на Δs. Стенки стакана тонкие.

1. Условие плавания. На стакан с содержимым действуют сила тяжести $(m + m_0)g$ вниз и сила Архимеда $\rho_в g S_d z$ вверх (рисунок 2). Стакан движется медленно и равномерно, поэтому по первому закону Ньютона в проекции на вертикаль

$$\rho_в g S_d z = (m + m_0)g \quad \Rightarrow \quad z = \frac{m + m_0}{\rho_в S_d} = \frac{4(m + m_0)}{\pi \rho_в d^2}.$$

Вода в стакан падает с пренебрежимо малой высоты — удар струи стакан не толкает, учитываем только её вес. Сначала $m_0 = 0$: $z_0 = \frac{4 \cdot 150}{\pi \cdot 36} \approx 5{,}3$ см.



Силы на стакан с грузом и налитой водой: сила тяжести и сила Архимеда; z — глубина погружения.

Пункт 1. Скорость стакана. *Шаг 1 — прирост глубины.* За Δt масса m_0 растёт на Δm, и по формуле пункта 1

$$\Delta z = \frac{4\Delta m}{\pi \rho_в d^2} = \frac{4 \cdot 10}{\pi \cdot 1 \cdot 36} \text{ см} \approx 0{,}354 \text{ см}.$$

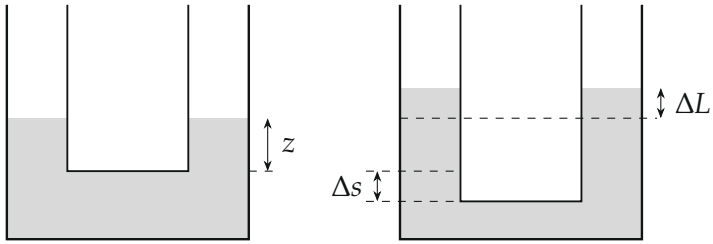
Он одинаков каждую секунду — погружение равномерное.

Шаг 2 — куда девается вытесненная вода. Глубина погружения z — это расстояние от уровня воды до дна стакана. Она растёт и потому, что стакан опускается, и потому, что уровень поднимается (рисунок 3):

$$\Delta z = \Delta s + \Delta L.$$

Воды в сосуде (вне стакана) не прибавляется: распылитель льёт только в стакан. Объём этой воды под уровнем — $S_D L$ минус погружённый объём стакана $S_d z$ — не меняется:

$$S_D\,\Delta L - S_d\,\Delta z = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta L = \frac{d^2}{D^2}\,\Delta z.$$



было через Δt

За время Δt стакан опускается на Δs, а уровень воды поднимается на ΔL: глубина погружения растёт на $\Delta z = \Delta s + \Delta L$.

Шаг 3 — перемещение относительно дна.

$$\Delta s = \Delta z - \Delta L = \Delta z \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right) = \frac{D^2 - d^2}{D^2} \cdot \frac{4\Delta m}{\pi \rho_в d^2}.$$

Скорость стакана относительно дна — перемещение за секунду:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{D^2 - d^2}{D^2} \cdot \frac{4\Delta m}{\pi \rho_в d^2 \, \Delta t} = 0{,}64 \cdot 0{,}354 \text{ см/с} \approx 2{,}3 \text{ мм/с}.$$

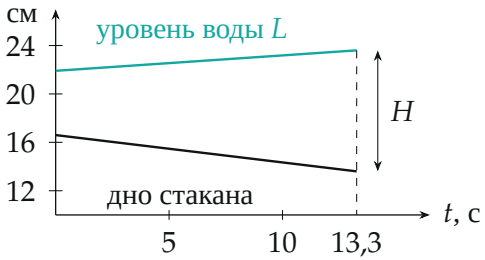
Пункт 2. Время до полного погружения. Стакан погрузится целиком, когда глубина погружения дойдёт до его высоты: $z = H$. По формуле пункта 1 для этого в стакан нужно налить

$$m_1 = \rho_в \frac{\pi d^2}{4} H - m = \frac{\pi \cdot 36}{4} \cdot 10 - 150 \approx 283 - 150 = 133 \text{ г}.$$

Воду добавляют по Δm в секунду:

$$t = \frac{m_1}{\Delta m} \Delta t = \frac{\pi d^2 H \rho_в - 4m}{4\Delta m} \Delta t \approx \frac{133}{10} \text{ с} \approx 13 \text{ с}.$$

Внутри стакана к этому моменту вода стоит на высоте $\frac{4m_1}{\pi \rho_в d^2} \approx 4{,}7$ см — ниже края, переливаться через край стакана она не начала; дна сосуда стакан не касается (рисунок 4).



Высоты над дном сосуда (по вычисленным значениям): уровень воды поднимается, дно стакана опускается со скоростью $v \approx 0{,}23$ см/с; через 13,3 с между ними $H = 10$ см.

Обратите внимание. Скорость стакана относительно дна — не $\Delta z / \Delta t$: часть погружения «делает» поднимающаяся вода. Множитель $1 - \frac{d^2}{D^2} = 0{,}64$ показывает, какая доля погружения приходится на движение самого стакана.

Проверка. Размерность: $\frac{\text{г}}{(\text{г/см}^3)\cdot\text{см}^2\cdot\text{с}} = \text{см/с}$. Предел: в очень широком сосуде ($D \to \infty$) уровень не поднимается и $v = \Delta z/\Delta t$; если $D \to d$ (стакан впритык), вода не может обтекать стакан и $v \to 0$ — верно. Второй способ для пункта 1 по рисунку 4: дно стакана опустилось с 16,6 до 13,6 см за 13,3 с, $\frac{3{,}0}{13{,}3} \approx 0{,}23$ см/с — то же.

Смысл: стакан опускается со скоростью около 2,3 мм/с и через 13 с уходит под воду целиком.

Ответ. 1) $v = \dfrac{D^2 - d^2}{D^2} \cdot \dfrac{4\Delta m}{\pi \rho_\text{в} d^2\, \Delta t} \approx 2{,}3$ мм/с; 2) $t = \dfrac{\pi d^2 H \rho_\text{в} - 4m}{4\Delta m}\, \Delta t \approx$ 13 с ($\Delta t = 1$ с).