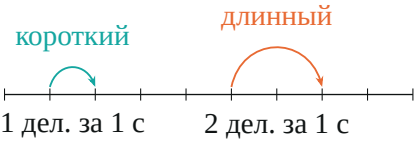
Кузнечик Вероники

Задача 1. [Курчатов 2022/23, 8 класс, задача 1] Юный зоолог Вероника проводит серию экспериментов с кузнечиком. Она помещает его на дорожку с нанесёнными на неё делениями разметки и измеряет среднюю скорость его движения за определённый промежуток времени, одинаковый для всех экспериментов. Кузнечик умеет делать длинные прыжки, перемещаясь на два деления за один прыжок, и короткие прыжки, перемещаясь за один прыжок всего на одно деление. В любом случае кузнечик тратит на прыжок одну секунду.

В первом эксперименте кузнечик совершил некоторое количество длинных и коротких прыжков, при этом средняя скорость его движения оказывается равной $5/4$ деления в секунду. Во втором эксперименте кузнечик совершил столько длинных прыжков, сколько коротких прыжков он совершил в первом эксперименте, при этом средняя скорость его продвижения оказывается равной $7/4$ деления в секунду. Какой окажется его средняя скорость в третьем эксперименте, если в нём он совершил в два раза меньше коротких прыжков, чем в первом эксперименте? Ответ округлите до тысячных.



Поясняющий рисунок: два вида прыжков кузнечика.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на среднюю скорость. Средняя скорость — весь путь, делённый на всё время. Время во всех опытах одно и то же, а каждый прыжок длится 1 с, поэтому *общее число прыжков во всех опытах одинаково*. Средняя скорость определяется только долей длинных прыжков: каждый короткий даёт 1 деление, каждый длинный — 2.

Обозначения. m и n — числа коротких и длинных прыжков в первом опыте; $N = m + n$ — число прыжков в любом опыте; $\alpha = \frac{m}{N}$, $\beta = \frac{n}{N}$ — доли коротких и длинных прыжков в первом опыте, $\alpha + \beta = 1$.

1. Первый опыт. Путь $m \cdot 1 + n \cdot 2$ делений за время N секунд:

$$v_1 = \frac{m + 2n}{m + n} = \alpha + 2\beta = \frac{5}{4}\ \text{дел/с}.$$

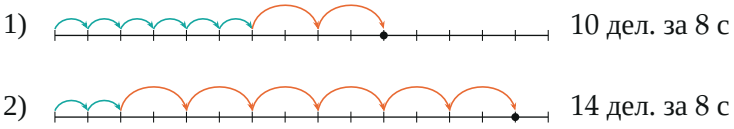
2. Второй опыт. Длинных прыжков m, а всего их по-прежнему N, значит, коротких $N - m = n$:

$$v_2 = \frac{n + 2m}{m + n} = 2\alpha + \beta = \frac{7}{4}\ \text{дел/с}.$$

3. Доли прыжков. Из системы

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = \dfrac{5}{4}, \\ 2\alpha + \beta = \dfrac{7}{4} \end{cases}$$

сложением: $3(\alpha + \beta) = 3$ — верно, $\alpha + \beta = 1$; вычитанием: $\alpha - \beta = \frac{1}{2}$. Отсюда $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = \frac{1}{4}$: в первом опыте три четверти прыжков короткие. Например, при $N = 8$: 6 коротких и 2 длинных (рисунок 2).

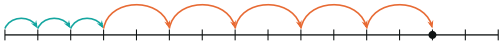


Первый и второй опыты при $N = 8$ прыжках (синие — короткие, красные — длинные).

4. Третий опыт. Коротких прыжков вдвое меньше, чем в первом: $\frac{m}{2}$; остальные $N - \frac{m}{2} = n + \frac{m}{2}$ — длинные (рисунок 3). Средняя скорость:

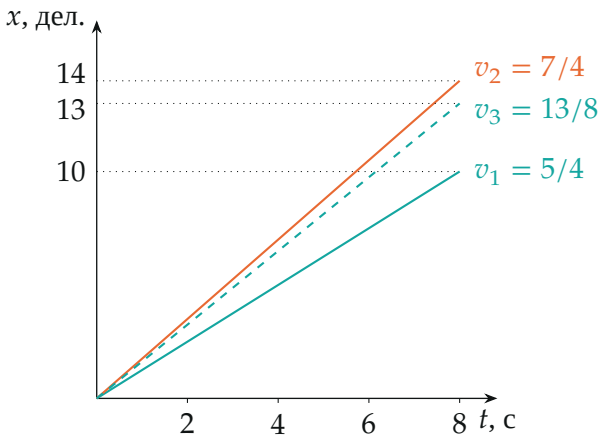
$$v_3 = \frac{\frac{m}{2} \cdot 1 + (n + \frac{m}{2}) \cdot 2}{m + n} = \frac{3}{2}\alpha + 2\beta,$$

$$v_3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{8} + \frac{1}{2} = \frac{13}{8} = 1{,}625\ \text{дел/с}.$$

3)  13 дел. за 8 с

Третий опыт при $N = 8$: 3 коротких и 5 длинных прыжков, 13 делений за 8 с.

5. Графики координаты. Координата кузнечика растёт ступеньками по 1 или 2 деления в секунду; в среднем — прямые с наклонами $v_1 < v_3 < v_2$ (рисунок 4). Третий опыт лежит между первыми двумя: длинных прыжков в нём больше, чем в первом, но меньше, чем во втором.



Координата кузнечика в среднем (при $N = 8$): наклоны прямых — средние скорости трёх опытов.

Обратите внимание. Ключ задачи — одинаковое время опытов: из него следует одинаковое число прыжков. При этом данные второго опыта лишь подтверждают первый: из $v_1 = \frac{5}{4}$ и $\alpha + \beta = 1$ уже следует $\beta = \frac{1}{4}$, а $v_2 = 1 + \alpha = \frac{7}{4}$ — проверка.

Ответ: $v_3 = \frac{3}{2}\alpha + 2\beta = \frac{13}{8} = 1{,}625$ деления в секунду.

Проверка. Подсчёт при $N = 8$: 3 коротких и 5 длинных прыжков — $3 + 10 = 13$ делений за 8 с, $13/8 = 1{,}625$. Ответ между 1 (все прыжки короткие) и 2 (все длинные) — разумно.

Ответ. $v_3 = \frac{13}{8} = 1{,}625$ деления в секунду.