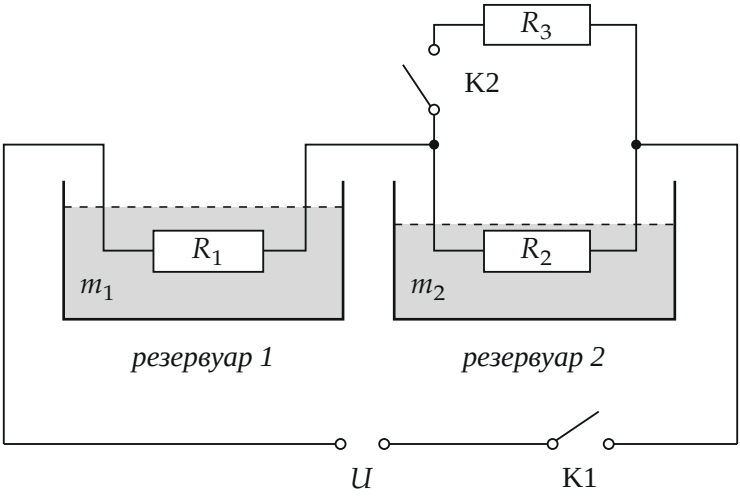
Нагреватели в двух калориметрах

Задача 3. [Курчатов 2022/23, 8 класс, задача 3] Нагревательные элементы погружены в два резервуара с водой, соединены последовательно и подключены к источнику постоянного напряжения $U = 15$ В, как показано на рисунке. Сопротивление первого нагревательного элемента $R_1 = 4{,}0$ Ом, сопротивление второго нагревательного элемента $R_2 = 6{,}0$ Ом. Резистор с сопротивлением $R_3 = 3{,}0$ Ом подключен параллельно ко второму нагревательному элементу. В начальный момент времени ключи K_1 и K_2 разомкнуты. В первом калориметре находится вода массой $m_1 = 150$ г, во втором вода массой $m_2 = 110$ г. Вода в обоих калориметрах имеет одинаковую начальную температуру. Ключ K_1 замыкают и через $\tau_0 = 90$ с также замыкают ключ K_2.



1. Определите время τ, на которое должен быть замкнут ключ K_2, чтобы температура воды в обоих резервуарах стала одинаковой. В момент времени τ ключи K_1 и K_2 размыкают. Считать, что по прошествии времени τ в обоих резервуарах установилось тепловое равновесие.
2. Определите, на сколько градусов изменится температура воды с момента начала нагревания до установления теплового равновесия.

Удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·°C). Теплоёмкостью резервуаров и сопротивлением соединительных проводов пренебречь. Систему следует считать теплоизолированной.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача «цепь → мощности → тепловой баланс». Пока K_2 разомкнут, ток через R_1 и R_2 одинаков, и больше тепла выделяет R_2; к тому же воды во втором резервуаре меньше — он греется быстрее. Замыкание K_2 отводит часть тока мимо R_2 через R_3: мощность R_2 падает, а общий ток и мощность R_1 растут — теперь догоняет первый резервуар. Время τ подбираем так, чтобы к концу температуры сравнялись.

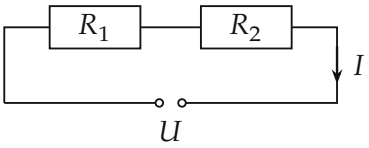
Обозначения. P_1, P_2 — мощности нагревателей при разомкнутом K_2; P'_1, P'_2 — при замкнутом; Δt — общее изменение температуры воды.

1. Ключ K_2 разомкнут. Нагреватели соединены последовательно (рисунок 2), сопротивление цепи $R_1 + R_2$. По закону Ома для участка цепи ток

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{15}{10} = 1{,}5 \text{ А}.$$

По закону Джоуля — Ленца мощность, выделяемая в резисторе, $P = I^2R$:

$$P_1 = I^2R_1 = 9 \text{ Вт}, \qquad P_2 = I^2R_2 = 13{,}5 \text{ Вт}.$$



Пока K_2 разомкнут: R_1 и R_2 последовательно, ток через них одинаков.

2. Ключ K_2 замкнут. Теперь R_3 подключён параллельно R_2 (рисунок 3). Сопротивление параллельного участка

$$R_{23} = \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3} = \frac{6 \cdot 3}{9} = 2 \text{ Ом}.$$

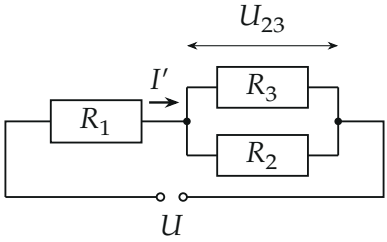
Общий ток и напряжение на параллельном участке:

$$I' = \frac{U}{R_1 + R_{23}} = \frac{15}{6} = 2{,}5\text{ А}, \qquad U_{23} = I'R_{23} = 5\text{ В}.$$

Мощности нагревателей: через R_1 течёт весь ток I', а на R_2 — напряжение U_{23}, поэтому

$$P'_1 = I'^2 R_1 = 25\text{ Вт}, \qquad P'_2 = \frac{U_{23}^2}{R_2} = \frac{25}{6} \approx 4{,}17\text{ Вт}.$$

Тот же результат даёт ток через R_2: он делится обратно сопротивлениям, $I_2 = I' \frac{R_3}{R_2+R_3} = \frac{5}{6}$ А, и $P'_2 = I_2^2 R_2 = \frac{25}{6}$ Вт.



После замыкания K_2: R_3 параллельно R_2, общий ток вырос, а на R_2 осталось только $U_{23} = 5$ В.

Пункт 1. Время τ. Запишем уравнение теплового баланса для воды каждого резервуара от начала нагрева до размыкания ключей: система теплоизолирована, теплоёмкостью резервуаров пренебрегаем, поэтому вся выделенная нагревателем теплота идёт на нагрев своей воды. Конечные температуры одинаковы, начальные тоже — изменение Δt одно на оба резервуара:

$$cm_1\Delta t = P_1\tau_0 + P'_1\tau, \qquad cm_2\Delta t = P_2\tau_0 + P'_2\tau.$$

Два уравнения, две неизвестные Δt и τ. Исключим Δt: умножим первое

на m_2, второе на m_1 и вычтем:

$$m_2(P_1\tau_0 + P_1'\tau) = m_1(P_2\tau_0 + P_2'\tau) \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{m_1P_2 - m_2P_1}{m_2P_1' - m_1P_2'}\,\tau_0.$$

Числа:

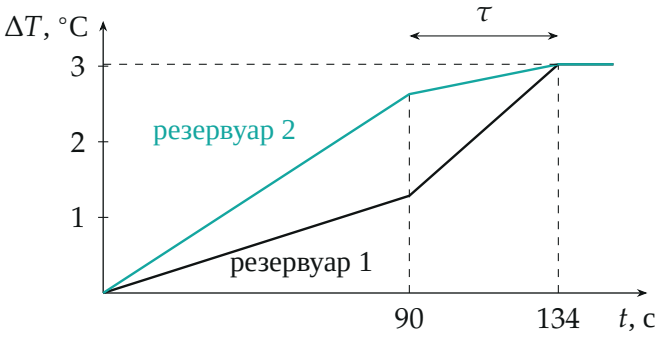
$$\tau = \frac{0{,}15 \cdot 13{,}5 - 0{,}11 \cdot 9}{0{,}11 \cdot 25 - 0{,}15 \cdot 4{,}17} \cdot 90\text{ с} = \frac{1{,}035}{2{,}125} \cdot 90\text{ с} \approx 44\text{ с}.$$

Пункт 2. Изменение температуры. Из уравнения для первого резервуара:

$$\Delta t = \frac{P_1\tau_0 + P_1'\tau}{cm_1} = \frac{9 \cdot 90 + 25 \cdot 43{,}8}{4200 \cdot 0{,}15} \approx 3{,}0\,^\circ\text{C}.$$

Для второго резервуара: $\frac{13{,}5 \cdot 90 + 4{,}17 \cdot 43{,}8}{4200 \cdot 0{,}11} \approx 3{,}0\,^\circ$C — то же, так и должно быть.

Ход нагрева показан на рисунке 4. Скорость роста температуры воды равна $P/(cm)$: до замыкания K_2 второй резервуар нагревается вдвое быстрее первого (0,029 против 0,014 °C/с), к моменту τ_0 он опережает на 1,3 °; после замыкания первый греется со скоростью 0,040, второй — 0,009 °C/с, и через $\tau \approx 44$ с прямые пересекаются.



Изменение температуры воды в резервуарах от времени, построено по вычисленным мощностям: до 90 с быстрее греется второй, после замыкания K_2 — первый.

Обратите внимание. После замыкания K_2 мощность R_1 выросла почти втрое: общее сопротивление цепи уменьшилось, ток вырос. Параллельный резистор не «отнимает» мощность у R_1, а добавляет ему.

Проверка. Размерность: $\frac{\text{кг·Вт}}{\text{кг·Вт}} \cdot \text{с}$ — секунды. Знак: числитель $m_1P_2 - m_2P_1 > 0$ (второй резервуар до τ_0 уходит вперёд), знаменатель $m_2P_1' - m_1P_2' > 0$ (после τ_0 первый догоняет) — решение существует. Второй способ для Δt — через второй резервуар, совпало.

Смысл: замыкание K_2 меняет, какой резервуар греется быстрее, и через 44 с отставание первого исчезает; к этому моменту вода в обоих нагрелась на 3 °C.

Ответ. 1) $\tau = \dfrac{m_1P_2 - m_2P_1}{m_2P_1' - m_1P_2'}\,\tau_0 \approx 44$ с, где $P_{1,2} = \dfrac{U^2R_{1,2}}{(R_1 + R_2)^2}$, $P_1' = \dfrac{U^2R_1}{(R_1 + R_{23})^2}$, $P_2' = \dfrac{U^2R_{23}^2}{R_2(R_1 + R_{23})^2}$, $R_{23} = \dfrac{R_2R_3}{R_2 + R_3}$; 2) $\Delta t = \dfrac{P_1\tau_0 + P_1'\tau}{cm_1} \approx 3\,^\circ\text{C}$.