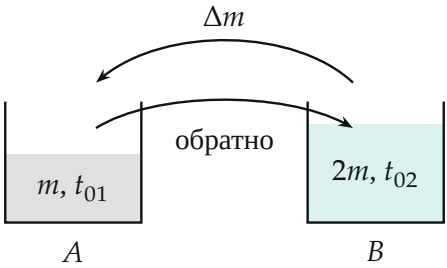
Переливание воды между калориметрами

Задача 4. [Курчатов 2022/23, 8 класс, задача 4] В калориметре A находится $m = 200$ г воды при температуре $t_{01} = 20\,^\circ\text{C}$, в калориметре B вдвое больше воды при температуре $t_{02} = 80\,^\circ\text{C}$. Далее происходит следующий процесс: из калориметра B переливают $\Delta m = 50$ г воды в калориметр A, после установления теплового равновесия в калориметре A переливают такое же количество воды обратно в калориметр B и ожидают установления теплового равновесия в калориметре B. Далее этот процесс повторяют несколько раз. Какое минимальное количество раз (учитывая первый процесс) потребуется совершить этот процесс, чтобы разность температур в двух калориметрах оказалась меньше $12\,^\circ\text{C}$? Удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·°C). Теплоёмкостью каждого калориметра пренебречь. Систему следует считать теплоизолированной.



Поясняющий рисунок: один процесс — порция Δm из B в A и такая же порция обратно.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на тепловой баланс смешивания, повторённый много раз. Каждое переливание сближает температуры, причём одинаково для любого процесса: в пропорции участвуют только массы, которые каждый раз те же. Поэтому разность температур от процесса к процессу умножается на одно и то же число $q < 1$ — убывает как геометрическая прогрессия. Найдём q и подберём число процессов.

Обозначения. $k = \dfrac{\Delta m}{m} = 0{,}25$; перед очередным процессом в A температура T_A, в B — T_B, разность $D = T_B - T_A$; после процесса разность

D'. Массы в начале каждого процесса прежние: в A — m, в B — $2m$ (сколько перелили, столько вернули).

1. Переливание из B в A. Уравнение теплового баланса для смеси в A: теплота, отданная порцией Δm, равна теплоте, полученной водой m (теплоёмкостью калориметра пренебрегаем, система теплоизолирована). Новая температура в A — T_A^*:

$$c\,\Delta m\,(T_B - T_A^*) = c\,m\,(T_A^* - T_A),$$

откуда

$$T_A^* = \frac{mT_A + \Delta m\,T_B}{m + \Delta m} = T_A + \frac{k}{1+k}\,D.$$

Разность температур B и A стала

$$D^* = T_B - T_A^* = \frac{D}{1+k}.$$

2. Переливание из A обратно в B. В B осталось $2m - \Delta m$ воды при T_B, к ней добавляют Δm при T_A^*. Тепловой баланс:

$$c\,(2m - \Delta m)(T_B - T_B') = c\,\Delta m\,(T_B' - T_A^*),$$

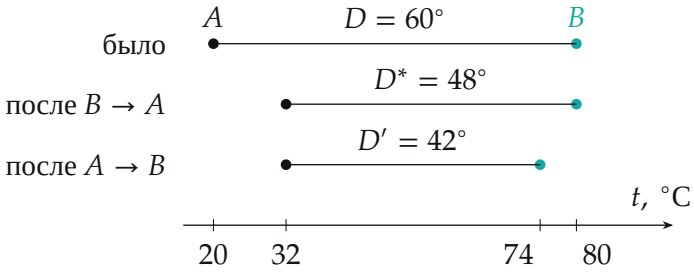
откуда

$$T_B' = T_B - \frac{\Delta m}{2m}\,D^* = T_B - \frac{k}{2}\,D^*.$$

В A температура при этом не меняется ($T_A' = T_A^*$). Разность после процесса:

$$D' = T_B' - T_A^* = D^*\left(1 - \frac{k}{2}\right) = \frac{2-k}{2(1+k)}\,D = qD,$$

$$q = \frac{2 - 0{,}25}{2 \cdot 1{,}25} = 0{,}7.$$



Первый процесс по шагам: температуры A (чёрная точка) и B (бирюзовая) и их разность.

3. Первый процесс в числах. $T_A^* = \frac{200\cdot 20+50\cdot 80}{250} = 32\,^\circ\text{C}$; в B: $T_B' = \frac{350\cdot 80+50\cdot 32}{400} = 74\,^\circ\text{C}$ (рисунок 3). Разность $42\,^\circ\text{C} = 0{,}7\cdot 60\,^\circ\text{C}$ — совпадает с формулой пункта 2.

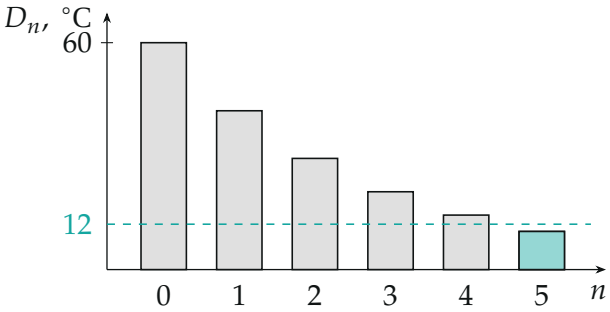
4. Число процессов. После n процессов разность

$$D_n = q^n\,(t_{02} - t_{01}) = 0{,}7^n\cdot 60\,^\circ\text{C}.$$

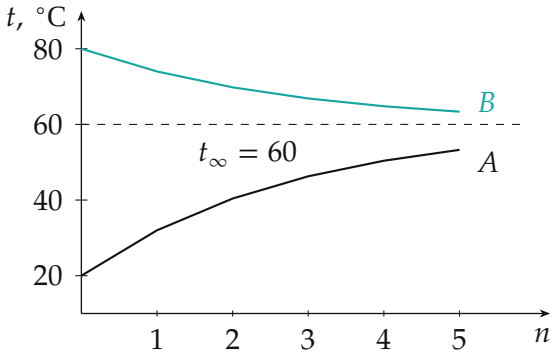
Нужно $D_n < 12\,^\circ\text{C}$, то есть $0{,}7^n < 0{,}2$. Перебираем:

n	0	1	2	3	4	5
D_n, °C	60	42	29,4	20,6	14,4	10,1

Впервые меньше 12 °C — при $n = 5$ (рисунок 4).



Разность температур после n процессов, $D_n = 60\cdot 0{,}7^n$: каждый следующий столбик в 0,7 раза ниже. Ниже штриховой линии 12° впервые опускается пятый.



Температуры в калориметрах после каждого процесса (расчёт по шагам): обе приближаются к 60 °C, а не к 50 °C.

Обратите внимание. Температуры не сходятся к середине 50 °C: в B воды вдвое больше, поэтому обе стремятся к общей температуре $t_\infty = \frac{m\,t_{01}+2m\,t_{02}}{3m} = 60\,^\circ\text{C}$, которая установилась бы при полном смешивании. На рисунке 5 видно, что A нагревается сильнее, чем остывает B.

Проверка. Прямой пошаговый расчёт температур A и B после каждого процесса даёт 32 и 74, 40,4 и 69,8, 46,3 и 66,9, 50,4 и 64,8, 53,3 и 63,4 °C — разности 42; 29,4; 20,6; 14,4; 10,1, как в таблице. Сохранение энергии: $mT_A + 2mT_B$ не меняется, например $200 \cdot 53{,}3 + 400 \cdot 63{,}4 \approx 36\,000 = 200 \cdot 20 + 400 \cdot 80$. Предел: при $k \to 0$ получаем $q \to 1$ — без переливания разность не меняется.

Смысл: каждое туда-обратно забирает 30% разности температур; от 60 ° до 12 ° (в 5 раз) нужно пять процессов, четырёх мало (14,4 °).

Ответ. Разность после n процессов $D_n = \left[\frac{2-k}{2(1+k)}\right]^n (t_{02} - t_{01}) = 0{,}7^n \cdot 60\,^\circ\text{C}$; меньше 12 °C она при $n \geq 5$ — потребуется 5 процессов.