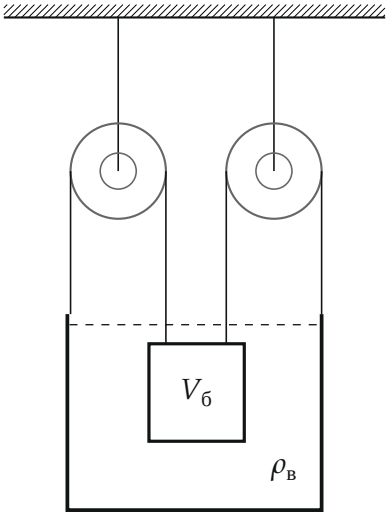
Брусок в ёмкости на тросах

Задача 5. [Курчатов 2022/23, 8 класс, задача 5] Ёмкость, наполненную водой до объёма $V_в$, симметрично закрепляют с бруском двумя нерастяжимыми тросами, перекинутыми через два блока, при этом брусок погружён в ёмкость с водой, как показано на рисунке. Ёмкость и тросы считать невесомыми. Объём бруска $V_б$ в 5 раз меньше объёма воды $V_в$. Система находится в равновесии, брусок полностью погружён в воду, но не касается дна. Определите, во сколько раз плотность материала бруска $\rho_б$ больше плотности воды $\rho_в$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие тел в жидкости. Каждый трос перекинут через блок: одним концом он держит ёмкость, другим — брусок, и натяжение по всему тросу одно. Ёмкость невесома, поэтому тросы держат только силу, с которой вода давит на дно. Эта сила известна через высоту уровня, а уровень — через объёмы воды и бруска. Остаётся условие равновесия бруска.

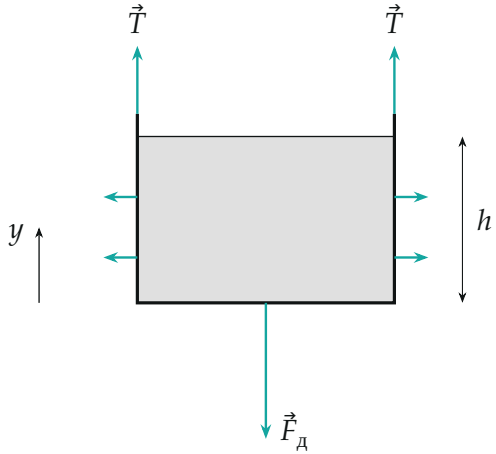
Обозначения. T — натяжение каждого троса (тросы одинаковы по симметрии); S — площадь дна ёмкости, h — высота уровня воды в ней; F_A — сила Архимеда на брусок; $V_б = V_в/5$. Ось y — вверх.

1. Уровень воды. Брусок целиком под водой, поэтому под уровнем h находятся вода и брусок:

$$Sh = V_в + V_б.$$

2. Равновесие ёмкости. На невесомую ёмкость действуют: два троса, каждый с силой T вверх, и вода. Силы давления воды на боковые стенки горизонтальны и попарно уравновешены, остаётся давление на дно: $p = \rho_в g h$, сила $F_д = \rho_в g h S$ вниз (рисунок 2). Первый закон Ньютона для ёмкости в проекции на ось y (масса ёмкости равна нулю):

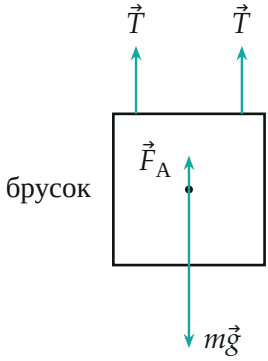
$$2T - \rho_в g h S = 0 \quad \Rightarrow \quad 2T = \rho_в g\,(V_в + V_б).$$



Силы на невесомую ёмкость: натяжения тросов вверх, давление воды на дно вниз; давления на боковые стенки взаимно уравновешены.

3. Равновесие бруска. На брусок действуют: сила тяжести $m\vec{g}$ вниз, $m = \rho_б V_б$; два троса по T вверх; сила Архимеда $F_А = \rho_в g V_б$ вверх (брусок погружён целиком), рисунок 3. Дна он не касается — реакции опоры нет. Первый закон Ньютона для бруска в проекции на ось y:

$$2T + \rho_в g V_б - \rho_б V_б g = 0.$$



Силы на брусок: два натяжения, сила Архимеда и сила тяжести; длины стрелок — по найденным значениям ($T : F_A : mg = 3 : 1 : 7$).

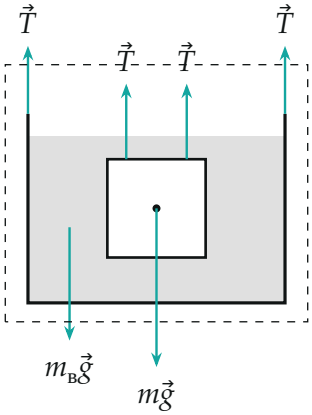
4. Отношение плотностей. Подставим $2T$ из пункта 2:

$$\rho_в g\,(V_в + V_б) + \rho_в g V_б = \rho_б g V_б \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_б}{\rho_в} = \frac{V_в}{V_б} + 2 = 5 + 2 = 7.$$

5. Второй способ — система целиком. Возьмём систему «ёмкость + вода + брусок» (рисунок 4). Внешние силы: четыре конца тросов, каждый тянет вверх с силой T, и сила тяжести воды и бруска. Давление воды и сила Архимеда — внутренние силы, они не нужны:

$$4T = \rho_в V_в g + \rho_б V_б g.$$

Вместе с $2T = \rho_в g(V_в + V_б)$ из пункта 2: $2\rho_в(V_в + V_б) = \rho_в V_в + \rho_б V_б$, откуда $\rho_б V_б = \rho_в(V_в + 2V_б)$ — снова $\rho_б = 7\rho_в$.



Система «ёмкость + вода + брусок» (штриховая граница): внешние силы — четыре натяжения и силы тяжести воды и бруска.

Обратите внимание. Тросы держат ёмкость не силой тяжести воды $\rho_в V_в g$, а силой давления на дно $\rho_в g(V_в + V_б)$: погружённый брусок поднял уровень, и вода давит на дно сильнее своего веса. Лишнее $\rho_в g V_б$ — это сила, с которой брусок давит на воду по третьему закону Ньютона в ответ на силу Архимеда.

Проверка. Размерность: отношение объёмов безразмерно. Предел: если брусок крохотный ($V_б \to 0$ при той же воде), он должен быть очень плотным, чтобы удержать на тросах ёмкость с водой, — $\rho_б/\rho_в = V_в/V_б + 2 \to \infty$, верно. Второй способ (пункт 5) дал то же. Ускорение g сократилось — оно дано лишь для полноты.

Смысл: брусок через блоки уравновешивает ёмкость с водой, поэтому он тяжелее воды в несколько раз: $\rho_б = 7\rho_в$.

Ответ. $\dfrac{\rho_б}{\rho_в} = \dfrac{V_в}{V_б} + 2 = 7.$