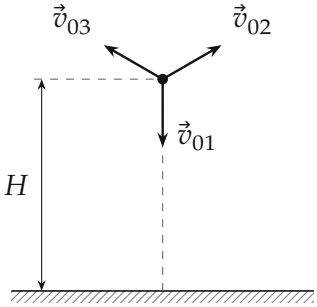
Разрыв снаряда на три осколка

Задача 2. [Курчатов 2022/23, 9 класс, задача 2] Снаряд выпустили вертикально вверх. Он достиг высшей точки траектории на высоте H над землёй и в этот момент разорвался на три осколка равной массы. Все осколки после взрыва начали двигаться с одинаковыми по модулю начальными скоростями. Один осколок, двигаясь строго вертикально вниз, ударился о землю за время $T_1 = 5$ с с момента взрыва. Два других осколка упали на землю одновременно за время $T_2 = 10$ с с момента взрыва. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

1. Определите высоту H, на которой произошел разрыв снаряда.
2. Определите величины скоростей осколков сразу после разрыва снаряда и в момент падения на землю.
3. Докажите, что все три осколка в интервале времени от момента разрыва снаряда до T_1 расположены на окружности с переменным радиусом, и опишите движение центра этой окружности с переменным радиусом.



Поясняющий рисунок: скорости осколков сразу после разрыва (направления найдены в решении).

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на закон сохранения импульса при разрыве и равноускоренное движение. В высшей точке скорость снаряда нулевая, взрыв длится мгновение — импульс осколков в сумме нулевой. Три равных по модулю вектора с нулевой суммой образуют равносторонний треугольник, поэтому углы между ними 120°: один осколок

летит вниз, два других — под 30° к горизонту вверх. Дальше каждый осколок движется с ускорением $\vec{g}$; два уравнения «высота стала нулём» дают H и v_0. Для пункта 3 удобно перейти в свободно падающую систему отсчёта, где все осколки летят равномерно из одной точки.

Обозначения. Ось y — вверх от земли, x — горизонтально, начало — под точкой взрыва; v_0 — модуль начальных скоростей, $v_к$ — модуль скорости при падении, α — угол скоростей второго и третьего осколков с горизонталью.

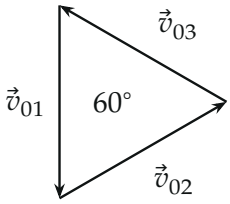
1. Закон сохранения импульса при разрыве. До разрыва импульс снаряда равен нулю, внешняя сила тяжести за время взрыва импульс не меняет:

$$m\vec{v}_{01} + m\vec{v}_{02} + m\vec{v}_{03} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{01} + \vec{v}_{02} + \vec{v}_{03} = 0.$$

Векторы равной длины v_0, приставленные друг к другу, замыкаются в равносторонний треугольник (рисунок 2). Значит, углы между самими скоростями 120°; $\vec{v}_{01}$ направлена вниз, поэтому $\vec{v}_{02}$ и $\vec{v}_{03}$ направлены вверх под углом $\alpha = 120° - 90° = 30°$ к горизонту, симметрично. Проекции:

$$v_{01y} = -v_0, \qquad v_{02y} = v_{03y} = v_0 \sin 30° = \frac{v_0}{2},$$

$$v_{02x} = -v_{03x} = v_0 \cos 30°.$$



Сумма скоростей равна нулю: векторы образуют равносторонний треугольник.

2. Высота и начальная скорость. Координата y при равноускорен-

ном движении $y = H + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$ (рисунок 3):

$$y_1 = H - v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \qquad y_{2,3} = H + \frac{v_0 t}{2} - \frac{gt^2}{2}.$$

Падение первого при T_1, второго и третьего — при T_2:

$$0 = H - v_0 T_1 - \frac{gT_1^2}{2}, \qquad 0 = H + \frac{v_0 T_2}{2} - \frac{gT_2^2}{2}.$$

Вычтем первое уравнение из второго — H уйдёт:

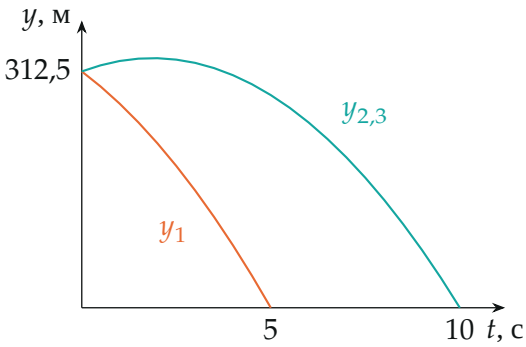
$$v_0\left(T_1 + \frac{T_2}{2}\right) = \frac{g(T_2^2 - T_1^2)}{2},$$

$$v_0 = \frac{g(T_2^2 - T_1^2)}{2T_1 + T_2} = \frac{10 \cdot 75}{20} = 37{,}5 \text{ м/с}.$$

Из первого уравнения:

$$H = v_0 T_1 + \frac{gT_1^2}{2} = \frac{gT_1T_2(T_1 + 2T_2)}{2(2T_1 + T_2)},$$

$$H = 187{,}5 + 125 = 312{,}5 \text{ м}.$$



Высоты осколков от времени (по найденным $H = 312{,}5$ м и $v_0 = 37{,}5$ м/с): первый падает через 5 с, два других — через 10 с.

3. Скорости при падении: закон сохранения энергии. Для каждого осколка (сопротивления нет) $\frac{mv_0^2}{2} + mgH = \frac{mv_к^2}{2}$. Начальная скорость и высота у всех одинаковы, поэтому и конечная скорость одна:

$$v_к = \sqrt{v_0^2 + 2gH} = \sqrt{1406{,}25 + 6250}\ \text{м/с} = 87{,}5\ \text{м/с}.$$

Второй способ для первого осколка: $v = v_0 + gT_1 = 37{,}5 + 50 = 87{,}5$ м/с — совпадает.

4. Окружность. Координаты осколка, вылетевшего под углом β к оси x:

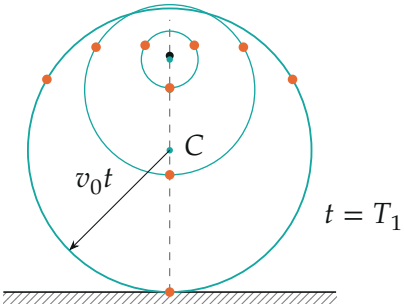
$$x = v_0 \cos\beta \cdot t, \qquad y = H + v_0 \sin\beta \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Выразим $\cos\beta = \dfrac{x}{v_0 t}$, $\sin\beta = \dfrac{y - H + gt^2/2}{v_0 t}$ и воспользуемся $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$:

$$x^2 + \left(y - \left(H - \frac{gt^2}{2}\right)\right)^2 = (v_0 t)^2.$$

Это уравнение окружности с центром в точке $(0;\ H - \frac{gt^2}{2})$ и радиусом $r = v_0 t$ — одно и то же для всех трёх осколков, раз у них один модуль v_0. Смысл: в системе отсчёта, свободно падающей из точки взрыва без начальной скорости, тяжести «нет», осколки летят равномерно по прямым со скоростью v_0 и в любой момент находятся на расстоянии $v_0 t$ от начала (рисунок 4). Утверждение верно, пока все осколки в полёте — до T_1.

Центр окружности движется по вертикали через точку взрыва вниз равноускоренно без начальной скорости, с ускорением g: $y_C = H - \frac{gt^2}{2}$ — так же, как центр масс осколков, то есть как двигался бы снаряд без разрыва. Радиус растёт равномерно, $r = v_0 t$. В момент T_1: $y_C = 187{,}5$ м $= r$ — окружность касается земли нижней точкой, где и падает первый осколок.



Положения осколков (красные точки) в моменты $t = 1$, 3 и 5 с лежат на окружностях радиуса v_0t; центр C падает свободно из точки взрыва.

Обратите внимание. Угол 30° не задан — он следует из закона сохранения импульса и равенства модулей скоростей. И окружность существует только пока летят все три осколка: после T_1 первый лежит на земле.

Ответ: 1) $H = \dfrac{gT_1T_2(T_1+2T_2)}{2(2T_1+T_2)} = 312{,}5$ м; 2) $v_0 = \dfrac{g(T_2^2-T_1^2)}{2T_1+T_2} = 37{,}5$ м/с, $v_к = \sqrt{v_0^2+2gH} = 87{,}5$ м/с; 3) осколки лежат на окружности радиуса v_0t с центром $(0;\ H-gt^2/2)$; центр падает свободно из точки взрыва без начальной скорости.

Проверка. Второе уравнение: $312{,}5+\frac{37{,}5\cdot10}{2}-\frac{10\cdot100}{2} = 312{,}5+187{,}5-500 = 0$ — верно. Размерности: gT^2 — м, gT — м/с.

Ответ. 1) $H = \dfrac{gT_1T_2(T_1+2T_2)}{2(2T_1+T_2)} = 312{,}5$ м; 2) $v_0 = \dfrac{g(T_2^2-T_1^2)}{2T_1+T_2} = 37{,}5$ м/с, $v_к = 87{,}5$ м/с (у всех осколков); 3) $x^2+\left(y-H+\frac{gt^2}{2}\right)^2 = (v_0t)^2$ — окружность радиуса v_0t, центр которой падает свободно без начальной скорости из точки разрыва.