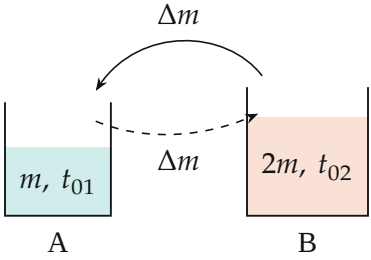
Переливание воды между калориметрами

Задача 3. [Курчатов 2022/23, 9 класс, задача 3] В калориметре A находится $m = 200$ г воды при температуре $t_{01} = 20°C$, в калориметре B вдвое больше воды при температуре $t_{02} = 80°C$. Далее происходит следующий процесс: из калориметра B переливают $\Delta m = 50$ г воды в калориметр A, после установления теплового равновесия в калориметре A переливают такое же количество воды обратно в калориметр B и ожидают установления теплового равновесия в калориметре B. Далее этот процесс повторяют несколько раз. Какое минимальное количество раз (учитывая первый процесс) потребуется совершить этот процесс, чтобы разность температур в двух калориметрах оказалась меньше 12°C? Удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · °C). Теплоёмкостью каждого калориметра пренебречь. Систему следует считать теплоизолированной.



Поясняющий рисунок: один «процесс» — перелив Δm из B в A (сплошная стрелка), затем Δm обратно из A в B (пунктир).

▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на уравнение теплового баланса, повторяемое много раз. Каждый перелив — смешивание двух порций воды: горячая отдаёт столько теплоты, сколько получает холодная. После полного процесса массы в калориметрах снова m и $2m$, а разность температур уменьшается в одно и то же число раз. Поэтому разность убывает как геометрическая прогрессия, и нужно найти, на каком шаге она станет меньше 12°C.

Обозначения. $k = \dfrac{\Delta m}{m} = 0{,}25$; a_n, b_n — температуры в A и B после n-го процесса ($a_0 = t_{01}$, $b_0 = t_{02}$); $\Delta_n = b_n - a_n$.

1. Перелив из B в A. В A было m воды при a, добавили Δm при b. Уравнение теплового баланса (калориметры не нагреваются, потерь нет):

$$cm(a' - a) = c\,\Delta m\,(b - a') \quad \Rightarrow \quad a' = \frac{a + kb}{1 + k}.$$

Разность температур сразу после этого шага:

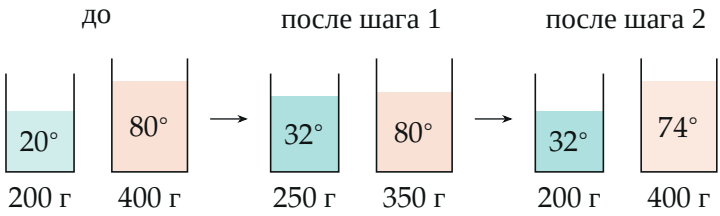
$$b - a' = \frac{b - a}{1 + k}.$$

2. Перелив обратно из A в B. В B осталось $2m - \Delta m$ при b, добавили Δm при a'. Снова уравнение теплового баланса:

$$c(2m - \Delta m)(b - b') = c\,\Delta m\,(b' - a') \quad \Rightarrow \quad b' = b - \frac{k}{2}\,(b - a').$$

В A температура a' не меняется (часть воды просто вылили). Новая разность:

$$b' - a' = (b - a')\left(1 - \frac{k}{2}\right) = \frac{2 - k}{2(1 + k)}\,(b - a).$$



Первый процесс по шагам (слева в каждой паре — калориметр A, справа — B). Разность температур: $60° \to 48° \to 42°$.

3. Прогрессия. Массы после процесса снова m и $2m$, поэтому каждый процесс умножает разность на одно и то же число

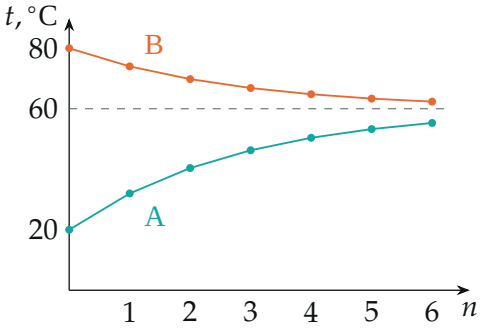
$$q = \frac{2 - k}{2(1 + k)} = \frac{1{,}75}{2{,}5} = 0{,}7, \qquad \Delta_n = q^n \Delta_0 = 0{,}7^n \cdot 60°\text{C}.$$

Проверка первым процессом: $a_1 = \frac{20+0{,}25\cdot 80}{1{,}25} = 32°\text{C}$, $b_1 = 80 - 0{,}125 \cdot 48 = 74°\text{C}$, $\Delta_1 = 42°\text{C} = 0{,}7 \cdot 60°\text{C}$.

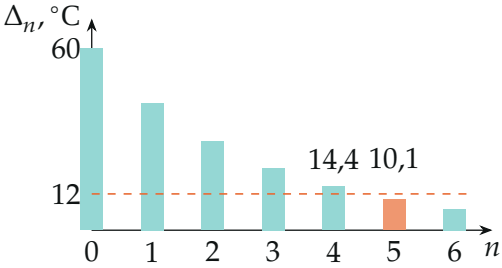
4. Сколько процессов. Условие $\Delta_n < 12°\text{C}$:

$$0{,}7^n < \frac{12}{60} = 0{,}2.$$

Степени: $0{,}7^4 = 0{,}240$, $0{,}7^5 = 0{,}168$. Четырёх процессов мало ($\Delta_4 = 14{,}4°\text{C}$), после пятого $\Delta_5 = 10{,}1°\text{C}$ (рисунки 3 и 4).



Температуры в калориметрах после каждого процесса (точный расчёт по шагам). Обе стремятся к 60°C.



Разность температур убывает в 0,7 раза за процесс; ниже 12°C она впервые оказывается после пятого.

Обратите внимание. В конце каждого процесса массы снова 200 и 400 г — поэтому множитель q один и тот же и задача сводится к прогрессии. Удельная теплоёмкость в ответ не входит: она сокращается в каждом уравнении баланса.

Ответ: $\Delta_n = \left[\dfrac{2-k}{2(1+k)}\right]^n (t_{02}-t_{01}) = 0{,}7^n \cdot 60^\circ\text{C} < 12^\circ\text{C}$ при $n_{\min} = 5$.

Проверка. Сохранение энергии: $ma_n + 2m\,b_n$ не меняется; после первого процесса $200 \cdot 32 + 400 \cdot 74 = 36\,000 = 200 \cdot 20 + 400 \cdot 80$ — верно, и обе температуры стремятся к $\frac{20+2\cdot 80}{3} = 60^\circ$C. Предел $k \to 0$ (не переливаем): $q \to 1$, разность не убывает — верно.

Ответ. $n_{\min} = 5$ (после n процессов разность температур $0{,}7^n \cdot 60^\circ$C: 14,4°C после четвёртого, 10,1°C после пятого).