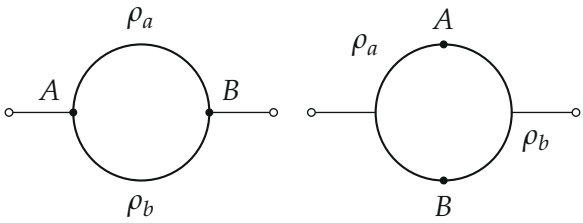
Кольцо из двух полуколец

Задача 4. [Курчатов 2022/23, 9 класс, задача 4] Проводящее кольцо радиуса r изготовлено из двух полуколец, соединённых в точках A и B. Удельное сопротивление провода верхнего полукольца составляет ρ_a, а нижнего — ρ_b. Площади поперечных сечений полуколец одинаковы. Кольцо подключают к внешнему напряжению в точках A и B, после чего измеряют общий ток (суммарный ток в двух полукольцах) I_1. Затем кольцо отключают от внешнего напряжения, поворачивают на 90° по часовой стрелке, снова подключают к внешнему напряжению и измеряют общий ток I_2. Во втором измерении оказалось, что соотношение токов равно $I_2 = 0{,}64\,I_1$. Найдите отношение удельных сопротивлений $\dfrac{\rho_a}{\rho_b}$ при условии, что $\rho_a < \rho_b$.

Примечание: сопротивление R провода длины l с площадью поперечного сечения S и удельным сопротивлением ρ рассчитывается по формуле $R = \dfrac{\rho l}{S}$.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Задача на закон Ома и соединение проводников. Внешнее напряжение подаётся в две диаметрально противоположные точки кольца, и кольцо — это две параллельные ветви по полуокружности. В первом подключении ветви — полукольца a и b, во втором (после поворота на 90° точки подключения попадают в середины полуколец) каждая ветвь состоит из четверти кольца a и четверти кольца b, соединённых последовательно. Отношение токов даёт уравнение на ρ_a/ρ_b.

Обозначения. U — внешнее напряжение, S — сечение провода, R_a и R_b — сопротивления полуколец, $x = \rho_a/\rho_b$.

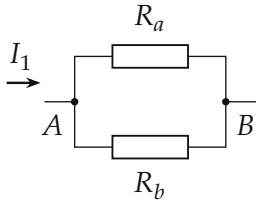
1. Сопротивления полуколец. Длина полукольца πr, по формуле из примечания

$$R_a = \frac{\pi r \rho_a}{S}, \qquad R_b = \frac{\pi r \rho_b}{S};$$

у четверти кольца сопротивление вдвое меньше.

2. Первое подключение. Полукольца подключены к одним и тем же точкам A и B — соединены параллельно (рисунок 2). Закон Ома для каждой ветви, общий ток — сумма токов ветвей:

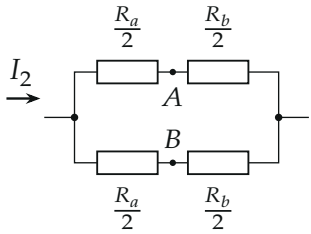
$$I_1 = \frac{U}{R_a} + \frac{U}{R_b} = \frac{US}{\pi r} \cdot \frac{\rho_a + \rho_b}{\rho_a \rho_b}.$$



Эквивалентная схема первого подключения: полукольца R_a и R_b параллельно.

3. Второе подключение. Точки подключения делят каждое полукольцо пополам (рисунок 3). Каждая из двух ветвей — четверть a и четверть b последовательно, её сопротивление $\frac{R_a+R_b}{2}$; ветви одинаковы и соединены параллельно:

$$I_2 = 2 \cdot \frac{U}{(R_a + R_b)/2} = \frac{4U}{R_a + R_b} = \frac{4US}{\pi r} \cdot \frac{1}{\rho_a + \rho_b}.$$



Эквивалентная схема второго подключения: в каждой ветви по четверти обоих полуколец последовательно (A и B — места спаев).

4. Уравнение. По условию $I_2 = 0{,}64\,I_1 = \frac{16}{25} I_1$:

$$\frac{4}{\rho_a + \rho_b} = \frac{16}{25} \cdot \frac{\rho_a + \rho_b}{\rho_a \rho_b} \quad \Rightarrow \quad 25\rho_a\rho_b = 4(\rho_a + \rho_b)^2.$$

Разделим на ρ_b^2:

$$4x^2 - 17x + 4 = 0, \qquad D = 289 - 64 = 225 = 15^2,$$

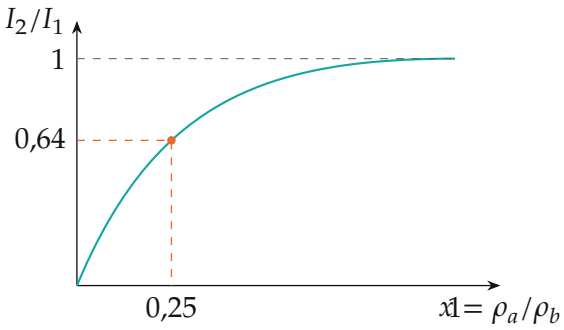
$$x_{1,2} = \frac{17 \mp 15}{8} = \frac{1}{4};\ 4.$$

Корни взаимно обратны: замена $a \leftrightarrow b$ ничего не меняет в схеме. Условие $\rho_a < \rho_b$ оставляет $x = \frac{1}{4}$.

5. Смысл: отношение токов. В общем виде

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{4\rho_a\rho_b}{(\rho_a + \rho_b)^2} = \frac{4x}{(1+x)^2} \le 1$$

(неравенство о средних: $(1+x)^2 \ge 4x$). Равенство — только при одинаковых полукольцах. Значение 0,64 достигается при $x = 0{,}25$ (рисунок 4).



Отношение токов $\frac{I_2}{I_1} = \frac{4x}{(1+x)^2}$ при $\rho_a < \rho_b$ $(0 < x < 1)$, построено по точкам.

Обратите внимание. Поворот на 90° переносит точки подключения в середины полуколец; спаи A и B при этом оказываются внутри ветвей, а не на клеммах.

Ответ: $\dfrac{\rho_a}{\rho_b} = x$, где $4x^2 - 17x + 4 = 0$ и $x < 1$: $\dfrac{\rho_a}{\rho_b} = 0{,}25$.

Проверка. При $x = \frac{1}{4}$: $\frac{I_2}{I_1} = \frac{4 \cdot 0{,}25}{1{,}25^2} = \frac{1}{1{,}5625} = 0{,}64$ — верно. Предел $\rho_a = \rho_b$: кольцо однородное, поворот ничего не меняет, $I_2 = I_1$ — формула даёт 1.

Ответ. $\dfrac{\rho_a}{\rho_b} = 0{,}25$.