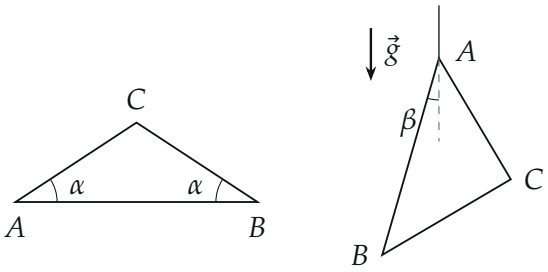
Треугольник из проволоки на нити

Задача 5. [Курчатов 2022/23, 9 класс, задача 5] Из тонкой однородной проволоки согнут равнобедренный треугольник ABC. Углы при основании AB равны $\alpha = 15°$. Треугольник подвешен на тонкой нити за вершину A и находится в равновесии. Найдите угол β между направлением нити и основанием AB. Числовой ответ выразите в градусах и округлите до десятых.



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на равновесие тела на нити и центр масс. Тело, подвешенное за точку, в равновесии висит так, что его центр масс лежит на вертикали под точкой подвеса (иначе момент силы тяжести относительно точки подвеса поворачивает тело). Значит, нужно найти центр масс *проволочного* треугольника H; тогда нить идёт вдоль AH, и β — угол между AH и AB. Проволочный треугольник — не пластинка: его масса сосредоточена на сторонах, и центр масс не совпадает с точкой пересечения медиан.

Обозначения. a — длина боковой стороны, m — её масса; D — середина AB, CD — высота; E, F — середины AC и BC, G — середина EF; m_1 — масса основания, m_2 — масса двух боковых сторон.

1. Размеры и массы. Из прямоугольного треугольника ADC:

$$CD = a\sin\alpha, \qquad AB = 2a\cos\alpha.$$

Проволока однородная, масса пропорциональна длине: $m_1 = 2m\cos\alpha$, $m_2 = 2m$.

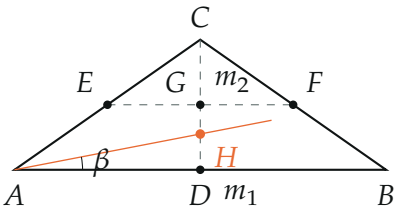
2. Центр масс. Центр масс каждой стороны — её середина. Основание заменяем точкой массы m_1 в D. Боковые стороны — массами m в

E и F, а эти две равные массы — одной массой $m_2 = 2m$ в середине G отрезка EF. Отрезок EF — средняя линия, поэтому G лежит на высоте CD и $DG = \frac{CD}{2}$ (рисунок 2). Центр масс H двух точек лежит на отрезке DG и делит его обратно пропорционально массам (правило рычага):

$$m_1 \cdot DH = m_2 \cdot GH, \qquad DH + GH = DG = \frac{a \sin\alpha}{2}.$$

Отсюда $GH = DH \cos\alpha$ и

$$DH = \frac{a \sin\alpha}{2(1 + \cos\alpha)}.$$

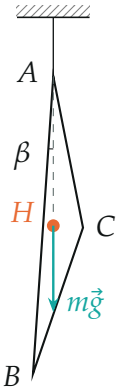


Построение центра масс (схема, углы при основании увеличены до 35°): m_1 — в середине основания D, m_2 — в середине средней линии G; центр масс H на отрезке DG. Нить в равновесии идёт вдоль AH.

3. Условие равновесия. На треугольник действуют сила натяжения нити (приложена в A) и сила тяжести (приложена в H). Равновесие: сумма сил равна нулю и сумма моментов относительно A равна нулю. Момент натяжения относительно A нулевой, значит, и момент силы тяжести нулевой: линия действия $m\vec{g}$ проходит через A, то есть H лежит на вертикали под A, нить направлена вдоль AH (рисунок 3).

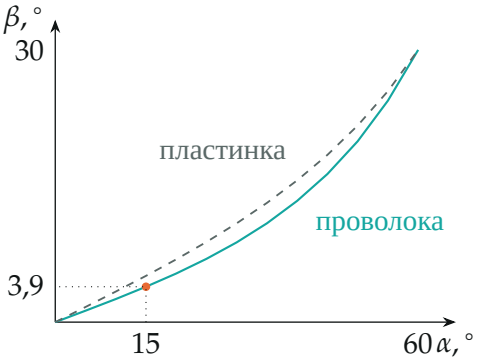
4. Угол. В прямоугольном треугольнике ADH катеты DH и $AD = \frac{AB}{2} = a\cos\alpha$:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{DH}{AD} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2(1 + \cos\alpha)} = \frac{0{,}2679}{2 \cdot 1{,}9659} = 0{,}0681, \qquad \beta = 3{,}9°.$$



Положение равновесия в настоящем масштабе ($\alpha = 15°$): центр масс H под точкой подвеса, основание AB отклонено от нити на $\beta = 3{,}9°$.

5. Сравнение с «пластинкой». Если бы центр масс был в точке пересечения медиан (так для сплошной пластинки), получилось бы $DH = \frac{CD}{3}$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{3}$, $\beta = 5{,}1°$ — это неверно для проволоки (рисунок 4). Ответы совпадают только для равностороннего треугольника ($\alpha = 60°$, $\beta = 30°$), когда массы всех сторон равны.



Угол β в зависимости от α для проволочного треугольника (сплошная) и сплошной пластинки (пунктир).

Обратите внимание. Центр масс проволочного треугольника — не точка пересечения медиан: у проволоки масса на сторонах, и вклад каждой стороны пропорционален её длине.

Ответ: $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2(1+\cos\alpha)} \approx 3{,}9°$.

Проверка. Предел $\alpha \to 0$: треугольник вырождается в отрезок, $\beta \to 0$ — верно. Равносторонний треугольник ($\alpha = 60°$): $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2{\cdot}1{,}5} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\beta = 30°$ — нить идёт по биссектрисе угла A, как и требует симметрия.

Ответ. $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{2(1+\cos\alpha)} \approx 3{,}9°$.