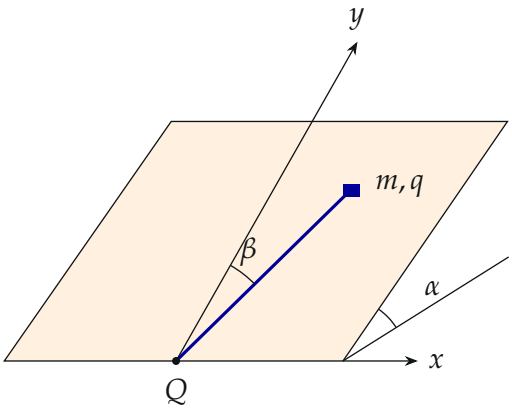
Заряженная шайба на жгуте: зона застоя

Задача 1. [Курчатов 2023/24, 10 класс, задача 1] Система (см. рис.) состоит из двух одноименных точечных зарядов Q и q, соединённых непроводящим упругим жгутом жёсткостью $\gamma = 1{,}0$ Н/м. Масса маленькой шайбы, несущей заряд q, равна $m = 0{,}20$ кг. Угол при вершине наклонной плоскости равен $\alpha = 30°$, коэффициент трения шайбы о плоскость $\mu = 0{,}5\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Начальная длина жгута пренебрежимо мала ($l_0 \to 0$). В отсутствие силы тяжести расстояние между зарядами равно $r_0 = 10$ м. Считайте, что модуль силы тяжести намного меньше, чем модуль силы упругости или силы кулоновского взаимодействия в области зоны застоя. На какой максимальный угол $\beta_{\max}$ может отклониться жгут от оси Oy при условии, что шайба должна находиться в положении равновесия? Определите границы зоны застоя (области, в которой шайба, отпущенная без начальной скорости, продолжает покоиться) на плоскости xOy. Изобразите схематично эту область на плоскости xOy, отразив при построении основные особенности границы этой области.

Примечание: при малых $|x| \ll 1$ справедлива приближённая формула: $(1 \pm x)^\alpha \approx 1 \pm \alpha x$.



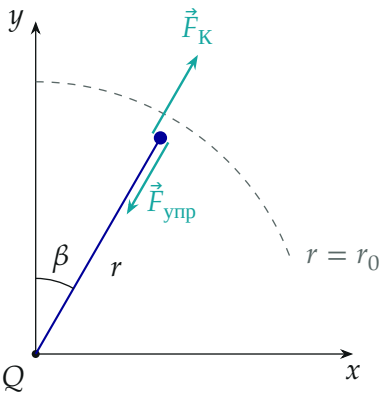
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие с трением покоя в плоскости. Без тяжести шайба стоит на расстоянии r_0, где кулоновское

отталкивание уравновешено жгутом. Слабая скатывающая сила сдвигает шайбу на малое Δr — возникает «радиальная пружина» с некоторой жёсткостью. Трение покоя может добавить любую силу не больше $\mu mg\cos\alpha$ в любом направлении плоскости. Зона застоя — точки, где три силы (скатывающая, радиальная и трение не больше предельного) могут дать нуль. Ключевые законы: закон Кулона, закон Гука, второй закон Ньютона (равновесие) и условие трения покоя $F_{\text{тр}} \le \mu N$.

Обозначения. Ось Oy направлена вверх вдоль плоскости, Ox — горизонтально в плоскости; r, β — расстояние шайбы от Q и угол жгута с осью Oy; $\Delta r = r - r_0$; $\hat{r}$ — единичный вектор от Q к шайбе; $G = mg\sin\alpha$ — скатывающая сила; $\rho = \mu mg\cos\alpha$ — предельная сила трения покоя.

1. Равновесие без тяжести. Сила Кулона $F_{\text{К}} = \dfrac{kqQ}{r^2}$ отталкивает шайбу от Q, жгут ($l_0 \to 0$) тянет к Q с силой $F_{\text{упр}} = \gamma r$ (рисунок 2):

$$\frac{kqQ}{r_0^2} = \gamma r_0.$$



Силы вдоль жгута: кулоновское отталкивание от Q и натяжение жгута к Q. Пунктир — окружность равновесия без тяжести $r = r_0$.

2. Радиальная «пружина». Пусть $r = r_0 + \Delta r$, $|\Delta r| \ll r_0$. По формуле

из примечания:

$$F_{\text{К}} = \frac{kqQ}{r_0^2}\Big(1+\frac{\Delta r}{r_0}\Big)^{-2} \approx \gamma r_0\Big(1-\frac{2\Delta r}{r_0}\Big), \qquad F_{\text{упр}} = \gamma(r_0+\Delta r).$$

Проекция их равнодействующей на $\hat{r}$:

$$F_r = F_{\text{К}} - F_{\text{упр}} = -3\gamma\,\Delta r.$$

Шайба, сдвинутая к Q ($\Delta r < 0$), выталкивается наружу силой $3\gamma|\Delta r|$ — как на пружине жёсткостью 3γ.

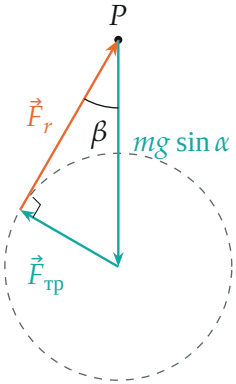
3. Условие равновесия. В плоскости xOy на шайбу действуют: скатывающая сила $G = mg\sin\alpha$ вдоль $-Oy$, радиальная сила $\vec{F}_r = F_r\hat{r}$ и трение покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$; поперёк плоскости $N = mg\cos\alpha$, поэтому $F_{\text{тр}} \le \rho = \mu mg\cos\alpha$. Равновесие (второй закон Ньютона с нулевым ускорением):

$$\vec{G} + \vec{F}_r + \vec{F}_{\text{тр}} = 0 \quad\Rightarrow\quad |\vec{G} + \vec{F}_r| \le \rho.$$

Числа: $G = 0{,}2\cdot 10\cdot 0{,}5 = 1{,}0$ Н; $\rho = 0{,}5\,\text{tg}\,\alpha\cdot mg\cos\alpha = 0{,}5\,G = 0{,}5$ Н. Так как $\rho < G$, без радиальной силы шайба соскользнула бы — она должна упереться в «пружину», $F_r > 0$, значит, $\Delta r < 0$: шайба ближе к Q, чем r_0.

4. Векторная диаграмма и $\beta_{\max}$. Отложим $\vec{G}$ из точки P вниз (рисунок 3). Конец вектора трения должен вернуться в P через вектор $\vec{F}_r$, направленный вдоль $\hat{r}$; значит, начало $\vec{F}_r$ (конец $\vec{G}+\vec{F}_{\text{тр}}$) лежит в круге радиуса ρ с центром в конце $\vec{G}$. Направление $\vec{F}_r$ — это направление жгута, угол β от оси Oy. Наибольший угол даёт касательная из P к окружности:

$$\sin\beta_{\max} = \frac{\rho}{G} = \frac{\mu mg\cos\alpha}{mg\sin\alpha} = \frac{\mu}{\text{tg}\,\alpha} = 0{,}5 \quad\Rightarrow\quad \beta_{\max} = 30^\circ.$$



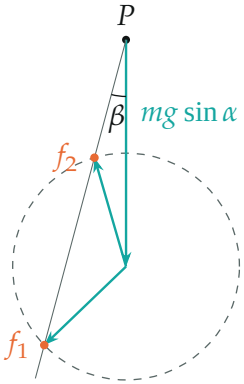
Векторная диаграмма при $\beta = \beta_{\max}$: вектор $\vec{F}_r$ касается круга возможных сил трения, сила трения перпендикулярна жгуту.

В этом крайнем положении трение предельное и перпендикулярно жгуту, по теореме Пифагора $F_r = \sqrt{G^2 - \rho^2}$:

$$\Delta r(\beta_{\max}) = -\frac{mg\sin\alpha}{3\gamma}\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{\operatorname{tg}^2\alpha}} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{м} \approx -0{,}29\ \text{м}.$$

5. Граница зоны при $|\beta| < \beta_{\max}$. Прямая вдоль $\hat{r}$ пересекает круг в двух точках (рисунок 4): трение предельное в двух положениях — ближнем к Q (сила F_r больше) и дальнем. Обозначим $f = F_r = 3\gamma|\Delta r|$. Условие $|\vec{G}+\vec{F}_r| = \rho$ по теореме косинусов (угол между $\vec{G}$ и $\vec{F}_r$ равен $180^\circ - \beta$):

$$f^2 - 2fG\cos\beta + G^2 = \rho^2 \quad \Rightarrow \quad f_{1,2} = G\Big(\cos\beta \pm \sqrt{\cos^2\beta - 1 + \frac{\rho^2}{G^2}}\Big).$$



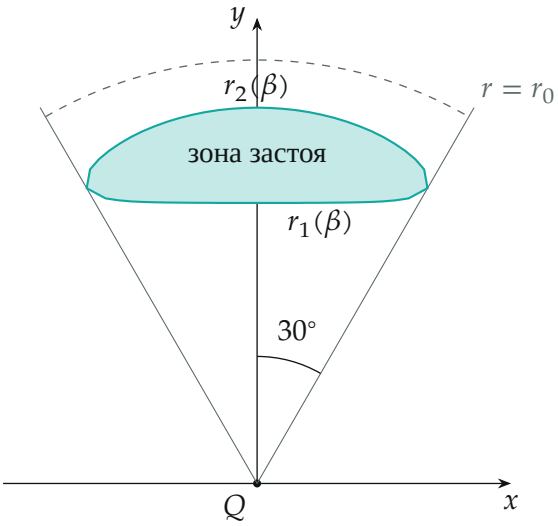
При $\beta < \beta_{\max}$ (здесь 15°) прямая жгута пересекает круг дважды: $\vec{F}_r$ идёт из точки f_1 (сильнее сжатая «пружина») или из точки f_2 в точку P. Между ними трение меньше предельного — шайба покоится.

Так как $\Delta r = -f/(3\gamma)$ и $\rho/G = \mu/\operatorname{tg}\alpha$, граница зоны застоя:

$$r_{1,2}(\beta) = r_0 - \frac{mg\sin\alpha}{3\gamma}\left(\cos\beta \pm \sqrt{\cos^2\beta - 1 + \frac{\mu^2}{\operatorname{tg}^2\alpha}}\right)$$

при $|\beta| \le \beta_{\max} = 30°$. С числами ($mg\sin\alpha/3\gamma = 1/3$ м): при $\beta = 0$ шайба покоится при r от $r_0 - 0{,}5$ м до $r_0 - 0{,}17$ м; при $\beta = \pm 30°$ обе границы сходятся в одну точку $r = r_0 - 0{,}29$ м.

6. Вид зоны застоя. Зона — узкий «серп» шириной до $1/3$ м вдоль дуги окружности радиуса $\approx r_0$ от $\beta = -30°$ до $30°$ (по дуге — около 10 м), симметричный относительно Oy, целиком внутри окружности $r = r_0$ (рисунок 5). Особенности границы: на концах ($\beta = \pm\beta_{\max}$) две ветви сходятся с общей касательной — острые концы; внешняя ветвь r_2 (дальняя от Q) ближе к окружности r_0, внутренняя r_1 отстоит от неё на 1/6–1/2 м; ширина наибольшая на оси Oy (1/3 м) и спадает к концам.



Зона застоя на плоскости xOy (схематично: ширина «серпа» по радиусу увеличена примерно в 10 раз). Граница построена по формуле для $r_{1,2}(\beta)$; концы при $\beta = \pm 30°$ острые.

Обратите внимание. Поправка к кулоновской силе при сдвиге на Δr даёт $-2\gamma\Delta r$, жгут — ещё $-\gamma\Delta r$; «жёсткость» радиальной пружины 3γ, а не γ. Без разложения Кулона по малому Δr ширина зоны получилась бы втрое больше.

Ответ: $\beta_{\max} = \arcsin\dfrac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha} = 30°$; границы зоны застоя:

$$r_{1,2}(\beta) = r_0 - \frac{mg\sin\alpha}{3\gamma}\left(\cos\beta \pm \sqrt{\cos^2\beta - 1 + \frac{\mu^2}{\operatorname{tg}^2\alpha}}\right)$$

при $|\beta| \le 30°$; зона — узкий серп внутри окружности $r = r_0$, симметричный относительно Oy, с острыми концами при $\beta = \pm 30°$.

Проверка. Размерность: $\dfrac{mg\sin\alpha}{3\gamma}$ — Н/(Н/м) =м. Предел $\mu \to \operatorname{tg}\alpha$ (трение удерживает и без жгута): $\sin\beta_{\max} \to 1$, и при $\beta = 0$ внутренняя граница $f = 2G$, внешняя $f = 0$ — шайба держится даже у r_0. Предел $\mu \to 0$: $\beta_{\max} \to 0$, зона стягивается в точку на оси Oy с $f = G$, $\Delta r = -G/3\gamma$ — обычное равновесие на «пружине». Условие малости: $f \le$

$1{,}5\ \text{Н} \ll \gamma r_0 = 10\ \text{Н}$, $|\Delta r| \leq 0{,}5\ \text{м} \ll r_0$ — разложение законно.

Ответ. $\beta_{\max} = \arcsin\dfrac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha} = 30°$; $r_{1,2}(\beta) = r_0 - \dfrac{mg\sin\alpha}{3\gamma}\left(\cos\beta \pm \sqrt{\cos^2\beta - 1 + \dfrac{\mu^2}{\operatorname{tg}^2\alpha}}\right)$ при $|\beta| \leq 30°$ — узкий серп внутри окружности $r = r_0$ с острыми концами при $\beta = \pm 30°$.