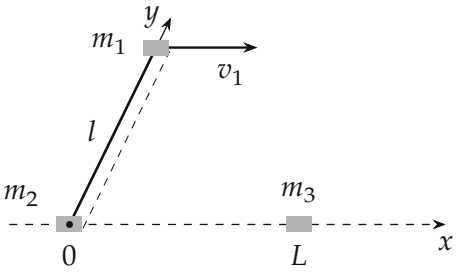
Две шайбы на нити и третья шайба

Задача 2. [Курчатов 2023/24, 10 класс, задача 2] Две маленькие шайбы массами m_1 и $m_2 = 2m_1$ находятся на оси Oy гладкой горизонтальной плоскости и связаны нерастяжимой лёгкой нитью длины l. Первой шайбе толчком сообщают скорость v_1, направленную перпендикулярно нити вдоль оси Ox.

На каком расстоянии L вдоль оси Ox от второй шайбы должна находиться шайба массы $m_3 = m_2$, чтобы произошло столкновение? Какими будут скорости каждой из шайб после подобного столкновения? Считайте, что высота третьей шайбы такова, что натянутая нить проходит над этой шайбой, не задевая её.



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на свободное движение связанной пары тел и упругий удар. После толчка внешних сил в горизонтальной плоскости нет: центр масс пары идёт равномерно, а относительно него шайбы вращаются с постоянной угловой скоростью на натянутой нити. Шайба m_3 покоится. Столкновение возможно двумя способами: шайба m_2 «заходит» на m_3 (каждый полный оборот она проходит через ось Ox) или шайба m_1 пересекает ось Ox в той же точке, где m_3. Удар считаем центральным и упругим (шайбы маленькие и гладкие); если после удара нить должна растянуться — происходит рывок нити, тоже упругий.

Обозначения. Начальную скорость шайбы m_1 обозначим $v_0 \equiv v_1$, чтобы буква v_1 осталась для скорости первой шайбы в момент удара. C — центр масс пары, v_C — его скорость, ω — угловая скорость вращения пары, $\varphi = \omega t$ — угол поворота нити от оси Oy (по часовой стрелке). Штрихи — скорости после удара, два штриха — после рывка нити.

1. Движение центра масс. Закон сохранения импульса пары (внешних горизонтальных сил нет) и определение центра масс, шайба m_2 в начале координат:

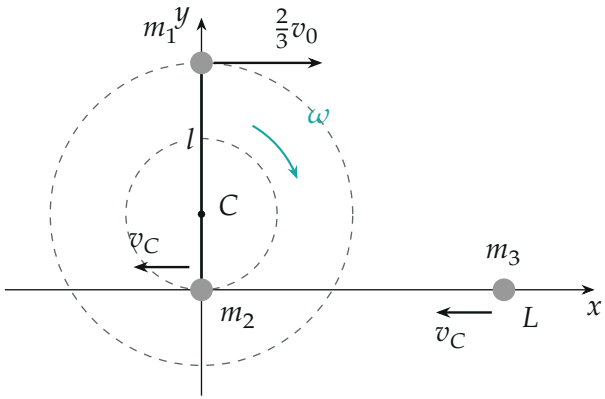
$$v_C = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} = \frac{v_0}{3}, \qquad y_C = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} = \frac{l}{3} = \text{const}.$$

Центр масс движется вдоль прямой $y = l/3$ параллельно Ox.

2. Система центра масс. Перейдём в инерциальную систему отсчёта, движущуюся со скоростью v_C вдоль Ox: зачем — в ней движение пары — чистое вращение. Скорости шайб в ней: m_1 — $v_0 - v_C = \frac{2v_0}{3}$ вправо, m_2 — $v_C = \frac{v_0}{3}$ влево (рисунок 2). Шайбы вращаются вокруг C по окружностям радиусов $\frac{2l}{3}$ и $\frac{l}{3}$ с угловой скоростью

$$\omega = \frac{v_0 - v_C}{2l/3} = \frac{v_C}{l/3} = \frac{v_0}{l},$$

нить всё время натянута (центростремительное ускорение обеих шайб даёт только нить). Шайба m_3 в этой системе едет со скоростью $v_{3x} = -v_C$.



Система центра масс: пара вращается вокруг C по часовой стрелке, третья шайба едет навстречу со скоростью v_C.

3. Встреча m_2 и m_3. Шайба m_2 бывает на оси Ox только в начале координат, после целого числа оборотов: $\omega t = 2\pi k$. К этому моменту

m_3 должна доехать до начала координат: $L + v_{3x}t = 0$. Отсюда

$$L_k = v_C \frac{2\pi k}{\omega} = \frac{v_0}{3} \cdot \frac{2\pi k\, l}{v_0} = \frac{2\pi}{3}\, lk, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

В момент встречи скорость m_2 в лабораторной системе равна $-v_C + v_C = 0$ (рисунок 2, нижняя точка окружности), как и у m_3: относительная скорость нулевая, шайбы лишь касаются, скорости не меняются:

$$v_1 = v_0, \qquad v_2 = 0, \qquad v_3 = 0.$$

4. Где m_1 пересекает ось Ox. Координаты m_1 в системе центра масс:

$$y_1 = y_C + \frac{2l}{3}\cos\varphi, \qquad x_1 = \frac{2l}{3}\sin\varphi.$$

Условие $y_1 = 0$ даёт $\cos\varphi = -\frac{y_C}{2l/3} = -\frac{m_1}{m_2} = -\frac{1}{2}$, то есть $\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ (точка справа, $x_1 = +\frac{l}{\sqrt{3}}$) или $\varphi = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$ (слева, $x_1 = -\frac{l}{\sqrt{3}}$). Шайба m_3 в этой системе к моменту $t = \varphi/\omega$ находится в точке $L - v_C t$; совпадение координат $L - v_C\varphi/\omega = x_1$ даёт

$$L_k^+ = \frac{\sqrt{3}}{3}\, l + \frac{l}{3}\Big(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k_1\Big),\ k_1 = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$L_k^- = -\frac{\sqrt{3}}{3}\, l + \frac{l}{3}\Big(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k_2\Big),\ k_2 = 1, 2, 3, \ldots$$

Во втором семействе $k_2 = 0$ дало бы $L < 0$ — третья шайба слева от второй, а она по условию на оси Ox впереди.

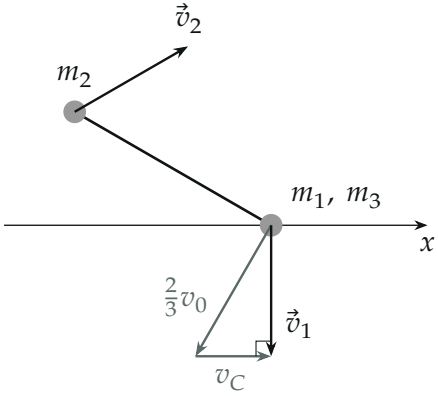
5. Скорость m_1 перед ударом справа ($\varphi = 120°$). Скорость в лабораторной системе — сумма скорости вращения $\frac{2v_0}{3}$ (по касательной к окружности) и v_C вдоль Ox. Угол между ними 120°; по теореме косинусов

$$v_1 = \sqrt{\Big(\tfrac{2v_0}{3}\Big)^2 + \Big(\tfrac{v_0}{3}\Big)^2 - 2\cdot\tfrac{2v_0}{3}\cdot\tfrac{v_0}{3}\cos 60°} = \frac{\sqrt{3}}{3}v_0.$$

Треугольник скоростей прямоугольный ($\frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$), поэтому $\vec{v}_1$ направ-

лена вертикально вниз, вдоль $-Oy$ (рисунок 3). Скорость m_2 (вращение $\frac{v_0}{3}$ под углом 60° к Ox плюс v_C):

$$v_2 = \sqrt{v_C^2 + v_C^2 + 2v_C^2 \cos 60^\circ} = \sqrt{3}\, v_C = \frac{\sqrt{3}}{3} v_0.$$



Удар справа: $\varphi = 120^\circ$. Скорость m_1 — сумма скорости вращения и $\vec{v}_C$, она вертикальна и по модулю $v_0/\sqrt{3}$.

6. Удар m_1 о m_3. Удар центральный (вдоль $\vec{v}_1$), нить за время удара не действует (она лишь перестаёт натягиваться, см. ниже). Закон сохранения импульса в проекции на направление $\vec{v}_1$ и закон сохранения энергии:

$$\begin{cases} m_1 v_1 = -m_1 v_1' + m_3 v_3', \\ \dfrac{m_1 v_1^2}{2} = \dfrac{m_1 v_1'^2}{2} + \dfrac{m_3 v_3'^2}{2} \end{cases}$$

$$v_1' = v_1 \frac{m_3 - m_1}{m_1 + m_3} = \frac{\sqrt{3}}{9} v_0, \qquad v_3' = v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_3} = \frac{2\sqrt{3}}{9} v_0.$$

Шайба m_1 отскакивает вверх, m_3 уходит вниз.

Растягивается ли нить? Единичный вектор от m_1 к m_2: $\vec{n} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$. Скорость сближения вдоль нити $(\vec{v}_2 - \vec{v}_1') \cdot \vec{n}$, где $\vec{v}_2 = v_0(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{6})$, $\vec{v}_1' =$

$v_0(0;\frac{\sqrt{3}}{9})$:

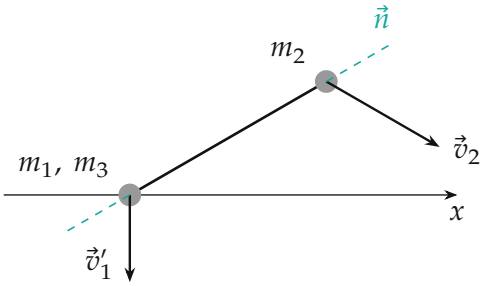
$$(\vec{v}_2-\vec{v}_1')\cdot\vec{n}=v_0\Big(-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{36}\Big)=-\frac{2\sqrt{3}}{9}v_0<0,$$

расстояние между шайбами уменьшается — нить провисает, и скорость m_2 не меняется. Итог справа: $v_1'=\frac{\sqrt{3}}{9}v_0$, $v_2'=\frac{\sqrt{3}}{3}v_0$, $v_3'=\frac{2\sqrt{3}}{9}v_0$.

7. Удар слева ($\varphi=240°$). Всё зеркально: $\vec{v}_1$ направлена вертикально вверх, $v_1=\frac{\sqrt{3}}{3}v_0$, после удара $v_1'=\frac{\sqrt{3}}{9}v_0$ вниз, $v_3'=\frac{2\sqrt{3}}{9}v_0$ вверх. Но теперь $\vec{n}=(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2})$, $\vec{v}_2=v_0(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{6})$, $\vec{v}_1'=v_0(0;-\frac{\sqrt{3}}{9})$, и

$$(\vec{v}_2-\vec{v}_1')\cdot\vec{n}=+\frac{2\sqrt{3}}{9}v_0>0$$

— шайбы расходятся вдоль нити, нить должна была бы растянуться (рисунок 4). Сразу после удара происходит рывок нити.



Удар слева: после удара m_1 движется вниз, m_2 — вправо-вниз; проекции их скоростей на нить (пунктир) расходятся — нить дёргает шайбы.

8. Рывок нити. Силы натяжения равны по модулю, противоположны и направлены вдоль нити, поэтому за время рывка: компоненты скоростей поперёк нити не меняются; сохраняется импульс пары в проекции на нить; кинетическая энергия сохраняется (нить нерастяжимая, рывок упругий). Проекции на $\vec{n}$ до рывка: $v_{1n}=-\frac{\sqrt{3}}{18}v_0$, $v_{2n}=\frac{\sqrt{3}}{6}v_0$. Скорость

центра масс вдоль нити

$$u = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2} = \frac{5\sqrt{3}}{54} v_0,$$

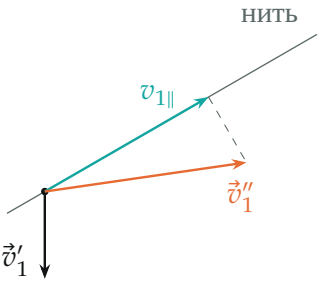
при упругом взаимодействии проекции «отражаются» относительно u:

$$v_{1\parallel} = 2u - v_{1n} = \frac{13\sqrt{3}}{54} v_0, \qquad v_{2\parallel} = 2u - v_{2n} = \frac{\sqrt{3}}{54} v_0.$$

Теперь $v_{1\parallel} > v_{2\parallel}$ — шайбы сближаются, нить снова провисает. Поперечные компоненты: $v_{1\perp} = v_1' \sin 60^\circ = \frac{v_0}{6}$, $v_{2\perp} = \frac{v_0}{2}$ (рисунок 5). Модули:

$$v_1'' = \sqrt{v_{1\parallel}^2 + v_{1\perp}^2} = \frac{7\sqrt{3}}{27} v_0, \qquad v_2'' = \sqrt{v_{2\parallel}^2 + v_{2\perp}^2} = \frac{\sqrt{183}}{27} v_0,$$

$$v_3'' = \frac{2\sqrt{3}}{9} v_0.$$



Рывок нити для шайбы m_1 (масштаб $v_0 = 6$ см): поперечная компонента $v_0/6$ сохраняется, компонента вдоль нити становится $\frac{13\sqrt{3}}{54} v_0$.

Обратите внимание. Удар слева не заканчивается столкновением: из-за него нить должна растянуться, и рывок нити меняет скорости шайб m_1 и m_2. Справа нить провисает, и рывка нет.

Ответ: 1) $L_k = \frac{2\pi}{3} lk$ — касание без удара, $v_1 = v_0$, $v_2 = v_3 = 0$; 2) L_k^+ — $v_1' = \frac{\sqrt{3}}{9} v_0$, $v_2' = \frac{\sqrt{3}}{3} v_0$, $v_3' = \frac{2\sqrt{3}}{9} v_0$; 3) L_k^- — $v_1'' = \frac{7\sqrt{3}}{27} v_0$, $v_2'' = \frac{\sqrt{183}}{27} v_0$, $v_3'' = \frac{2\sqrt{3}}{9} v_0$.

Проверка. Энергия в случае 3 (в единицах $m_1 v_0^2/2$):

$$\frac{147}{729} + 2 \cdot \frac{183}{729} + 2 \cdot \frac{108}{729} = \frac{729}{729} = 1$$

— сохранена. Импульс вдоль Ox в случае 2: $m_1 \cdot 0 + 2m_1 \cdot \frac{v_0}{2} + 0 = m_1 v_0$ — сохранён (удар и сама шайба m_3 движутся вдоль Oy). Размерности L — длина, скоростей — скорость.

Ответ. 1) $L_k = \dfrac{2\pi}{3} lk$, $k = 1, 2, \ldots$: шайбы m_2 и m_3 касаются без удара, $v_1 = v_0$, $v_2 = v_3 = 0$; 2) $L_k^+ = \dfrac{\sqrt{3}}{3} l + \dfrac{l}{3}\left(\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k_1\right)$, $k_1 = 0, 1, \ldots$: $v_1' = \dfrac{\sqrt{3}}{9} v_0$, $v_2' = \dfrac{\sqrt{3}}{3} v_0$, $v_3' = \dfrac{2\sqrt{3}}{9} v_0$; 3) $L_k^- = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} l + \dfrac{l}{3}\left(-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k_2\right)$, $k_2 = 1, 2, \ldots$: $v_1'' = \dfrac{7\sqrt{3}}{27} v_0$, $v_2'' = \dfrac{\sqrt{183}}{27} v_0$, $v_3'' = \dfrac{2\sqrt{3}}{9} v_0$ (здесь v_0 — начальная скорость первой шайбы, в условии v_1).