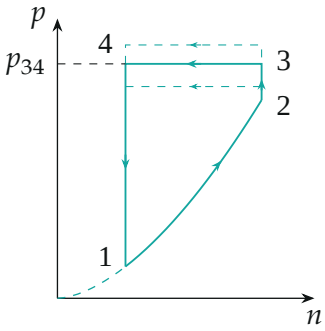
Цикл на (p, n)-диаграмме

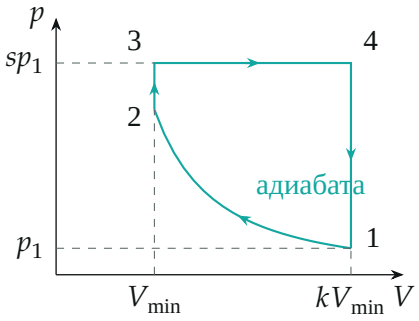
Задача 3. [Курчатов 2023/24, 10 класс, задача 3] На $(p;n)$-диаграмме, где n — концентрация газа, изображён циклический процесс, проводимый с $\nu = 1$ моль идеального одноатомного газа ($\gamma = 5/3$). Найдите отношение $V_{\max}/V_{\min}$ максимального объёма газа в данном процессе к минимальному, если известно, что участок 1–2 адиабатический, имеется возможность настраивать тепловой двигатель так, чтобы давление p_{34} на участке 3–4 менялось в широком диапазоне, а максимально возможный КПД данного циклического процесса равен $\eta_{\max} = 31\%$.



▲ **Решение. Что происходит.** Задача на КПД цикла и его максимум по параметру. Концентрация $n = N/V$, поэтому участки с $n = \text{const}$ — изохоры, горизонталь $p_{34} = \text{const}$ — изобара, а большей концентрации отвечает меньший объём. Цикл 1–2–3–4: адиабатное сжатие, изохорное нагревание при $V_{\min}$, изобарное расширение, изохорное охлаждение при $V_{\max}$. Переводим его на привычную $(p;V)$-диаграмму, считаем теплоты по первому началу термодинамики, а затем ищем, при каком p_{34} КПД наибольший.

Обозначения. $k = \dfrac{V_{\max}}{V_{\min}} = \dfrac{n_2}{n_1}$, $s = \dfrac{p_{34}}{p_1}$; $V_{\min} = V_2 = V_3$, $V_{\max} = V_1 = V_4 = kV_{\min}$.

1. Цикл на $(p;V)$-диаграмме. Точка 1 — наибольший объём и наименьшее давление; цикл обходится по часовой стрелке (рисунок 2), газ совершает положительную работу — это тепловой двигатель.



Тот же цикл на $(p;V)$-диаграмме (построен по точкам при $k=3$, $s=8$).

2. Адиабата 1–2. Уравнение Пуассона $pV^\gamma = \text{const}$, а $V \propto 1/n$, поэтому $p = \alpha n^\gamma$ и

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^\gamma = k^\gamma.$$

На адиабате теплообмена нет: $Q_{12} = 0$. Точка 3 должна лежать выше точки 2: $s \geq k^\gamma$.

3. Теплоты на участках. Первое начало термодинамики $Q = \Delta U + A$, для одноатомного газа $U = \frac{3}{2}pV$.

Изохора 2–3 ($V = V_{\min}$, работы нет), газ нагревается:

$$Q_{23} = \Delta U_{23} = \frac{3}{2}\,(sp_1 - k^\gamma p_1)V_{\min}.$$

Изобара 3–4 ($p = sp_1$, объём растёт от $V_{\min}$ до $kV_{\min}$), $A = p\Delta V$, $\Delta U = \frac{3}{2}p\Delta V$:

$$Q_{34} = \frac{5}{2}\,sp_1(k-1)V_{\min} > 0.$$

Изохора 4–1 ($V = kV_{\min}$), давление падает от sp_1 до p_1 — газ отдаёт теплоту:

$$|Q_{41}| = \frac{3}{2}\,(sp_1 - p_1)\,kV_{\min}.$$

4. КПД. Теплота получена на участках 2–3 и 3–4, отдана на 4–1:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{41}|}{Q_{23} + Q_{34}} = 1 - \frac{3k(s-1)}{3(s-k^\gamma) + 5s(k-1)}.$$

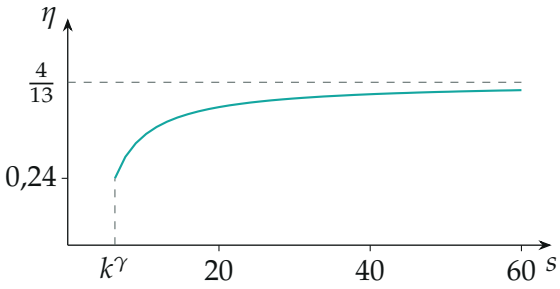
5. Наибольший КПД при данном k. Как зависит η от s? Перепишем дробь:

$$\frac{3k(s-1)}{(5k-2)s-3k^{\gamma}}.$$

Её производная по s пропорциональна $3k\left[(5k-2)-3k^{\gamma}\right]$. При $k>1$ $3k^{\gamma}>5k-2$ (при $k=1$ обе части равны 3, а слева производная $5k^{2/3}$ больше 5), поэтому дробь убывает, а КПД растёт с ростом s (рисунок 3). Наибольший КПД — в пределе $s\to\infty$, когда изобара 3–4 уходит вверх:

$$\eta_{\max}=1-\frac{3k}{3+5(k-1)}=1-\frac{3k}{5k-2}.$$

В этом пределе вклад адиабаты (слагаемое k^{γ}) пропадает, и показатель γ из ответа выпадает.



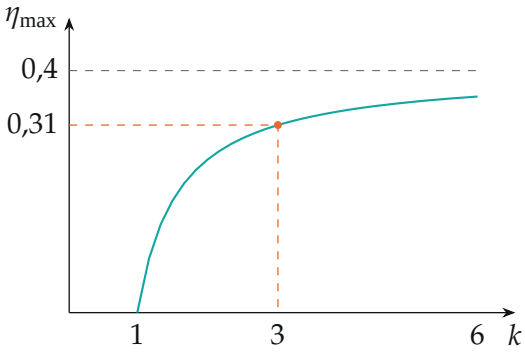
КПД цикла при $k=3$ в зависимости от $s=p_{34}/p_1$ (ось η начинается с 0,2): КПД растёт и стремится к $4/13\approx 0{,}31$.

6. Отношение объёмов. Из $\eta_{\max}=0{,}31$:

$$\frac{3k}{5k-2}=1-\eta_{\max}=0{,}69,$$

$$k=\frac{2(1-\eta_{\max})}{5(1-\eta_{\max})-3}=\frac{1{,}38}{0{,}45}\approx 3{,}07\approx 3.$$

При $k=3$ ровно $\eta_{\max}=4/13=30{,}8\%$, что при округлении до целых процентов и даёт 31% (рисунок 4).



Наибольший КПД цикла $\eta_{\max}(k) = 1 - \frac{3k}{5k-2}$: значению 0,31 отвечает $k \approx 3$; при $k \to \infty$ КПД стремится к 0,4.

Обратите внимание. «Максимально возможный КПД» — это предел при $p_{34} \to \infty$, а не значение при какой-то конечной настройке: КПД монотонно растёт с p_{34}. И не перепутайте ось: большая концентрация — малый объём, поэтому изохора 2–3 стоит при $V_{\min}$.

Ответ: $\dfrac{V_{\max}}{V_{\min}} = k$, где $1 - \dfrac{3k}{5k-2} = \eta_{\max}$, откуда $\dfrac{V_{\max}}{V_{\min}} = \dfrac{2(1-\eta_{\max})}{5(1-\eta_{\max})-3} \approx 3$.

Проверка. Предел $k \to 1$: цикл вырождается, $\eta_{\max} = 1 - \frac{3}{3} = 0$ — верно. Предел $k \to \infty$: $\eta_{\max} \to 1 - \frac{3}{5} = 0{,}4$ — КПД цикла из двух изохор и изобары при бесконечном давлении ограничен, разумно. Второй способ для $k = 3$, $s \to \infty$: на единицу $p_1 V_{\min}$ работа цикла $\approx s(k-1) = 2s$, подведено $\approx \frac{3}{2}s + \frac{5}{2} \cdot 2s = 6{,}5s$, $\eta \approx 2/6{,}5 = 4/13$ — совпадает.

Ответ. $\dfrac{V_{\max}}{V_{\min}} = \dfrac{2(1-\eta_{\max})}{5(1-\eta_{\max})-3} \approx 3$.