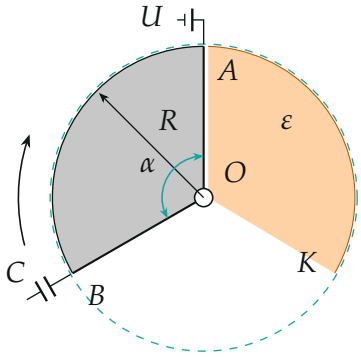
Электрогенератор с вращающимися пластинами

Задача 4. [Курчатов 2023/24, 10 класс, задача 4] Электрогенератор состоит из двух параллельных металлических пластин в виде двух секторов круга радиуса $R = 50$ см с центральным углом $\alpha = 120°$, закреплённых на непроводящем валу (обозначен O на рисунке) на расстоянии $d = 2{,}0$ см друг над другом. В точках A и B при помощи двух пар проводящих щёток (одна сверху, вторая снизу) подключены источник постоянного напряжения $U = 220$ В и изначально незаряженный конденсатор ёмкостью $C = 1{,}0$ мФ соответственно. В секторе AOK с центральным углом α расположен неподвижный слой диэлектрика толщины немного меньшей d, диэлектрическая проницаемость которого равна $\varepsilon = 6{,}5$. Двигатель вращает вал с пластинами, его мощность регулируется таким образом, чтобы вращение вала было равномерным. Период одного полного оборота генератора составляет $T = 10$ с.

Какой заряд q_1 передаётся конденсатору таким генератором за первый полный оборот из состояния, изображённого на рисунке? Какой максимальный заряд $q_{\max}$ может быть передан конденсатору в такой системе? Какова максимальная мощность $P_{\max}$ двигателя, приводящего пластины генератора во вращение?

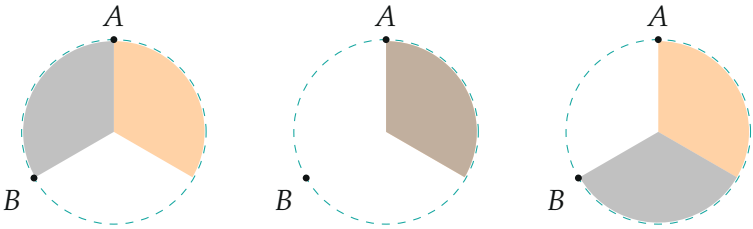


▲ **Решение. Что происходит.** Задача на конденсатор с изменяющейся ёмкостью. Пластины вращаются по часовой стрелке (стрелка на рисунке) и за оборот проходят три трети круга. Первая треть: пластины под

щёткой A (подключены к источнику) и въезжают в диэлектрик — ёмкость растёт при постоянном напряжении U, источник докачивает заряд. Вторая треть: щёток нет, пластины выезжают из диэлектрика — ёмкость падает при постоянном заряде, напряжение растёт в ε раз. Третья треть: пластины под щёткой B и отдают часть заряда конденсатору C. Это «насос» заряда; работу против электрических сил на второй трети совершает двигатель. Законы: определение ёмкости, сохранение заряда, закон сохранения энергии.

Обозначения. C_0 — ёмкость пластин без диэлектрика, $\omega = 2\pi/T$ — угловая скорость, t — время от начала оборота, q — заряд пластин, u — напряжение на конденсаторе C.

1. Три трети оборота. Пластины занимают сектор 120°; передний край начинается в точке A и за оборот проходит $A \to K \to B \to A$ (рисунок 2). Щётка A касается пластин при $0 < t < T/3$, щётка B — при $2T/3 < t < T$.



$t = 0$
у щётки A, въезд
в диэлектрик

$t = T/3$
без щёток, выезд
из диэлектрика

$t = 2T/3$
у щётки B,
отдача заряда

Положение пластин (серое) в начале каждой трети оборота; оранжевое — неподвижный диэлектрик.

2. Ёмкости. Площадь сектора $S = \frac{\alpha R^2}{2}$ ($\alpha = \frac{2\pi}{3}$), формула плоского конденсатора:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon_0 \alpha R^2}{2d},$$

$$C_0 = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 2{,}09 \cdot 0{,}25}{2 \cdot 0{,}02}\ \text{Ф} = 1{,}16 \cdot 10^{-10}\ \text{Ф}.$$

Когда пластины целиком в диэлектрике, $C' = \varepsilon C_0$. В промежуточном положении части с диэлектриком и без него — параллельно соединённые конденсаторы, ёмкость меняется линейно со временем (рисунок 3).

3. Заряд за первый оборот. При $0 < t < T/3$ напряжение на пластинах равно U, и к концу этой трети заряд пластин

$$q_0' = \varepsilon C_0 U.$$

При $T/3 < t < 2T/3$ пластины ни к чему не подключены, заряд q_0' сохраняется, ёмкость падает до C_0, напряжение растёт до εU. При $t > 2T/3$ пластины подключаются к незаряженному конденсатору C. Закон сохранения заряда и равенство напряжений (пластины и C соединены параллельно):

$$\begin{cases} q_0' = q + q_1, \\ \dfrac{q}{C_0} = \dfrac{q_1}{C} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad q_1 = \frac{Cq_0'}{C + C_0} = \frac{\varepsilon C C_0 U}{C + C_0},$$

$$q_1 \approx \varepsilon C_0 U = 1{,}7 \cdot 10^{-7}\ \text{Кл} = 0{,}17\ \text{мкКл}.$$

Так как $C \gg C_0$, конденсатор забирает почти весь заряд пластин.

4. Предельный заряд. Каждый следующий оборот повторяет первый: под щёткой A пластины снова заряжаются до $\varepsilon C_0 U$ (что было на них раньше, неважно — напряжение задаёт источник), под щёткой B к C подключён «источник» с напряжением εU. Пока $u < \varepsilon U$, заряд течёт в C; после оборота n

$$\varepsilon U - u_{n+1} = (\varepsilon U - u_n)\frac{C}{C + C_0},$$

и $u_n \to \varepsilon U$. Зарядка закончится, когда напряжение на C сравняется с напряжением пластин, выехавших из диэлектрика:

$$q_{\max} = C \cdot \varepsilon U = 10^{-3} \cdot 6{,}5 \cdot 220\ \text{Кл} = 1{,}4\ \text{Кл}.$$

(Чтобы набрать заметную долю этого заряда, нужно около $C/C_0 \sim 10^7$

оборотов — генератор очень медленный.)

5. Мощность двигателя: закон сохранения энергии. Вращение равномерное, кинетическая энергия не меняется. За время dt работа двигателя $P\,dt$ и работа источника $U\,dq$ идут на изменение энергии электрического поля пластин dW:

$$P\,dt + U\,dq = dW.$$

Изменение ёмкости при въезде или выезде:

$$\left|\frac{dC}{dt}\right| = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)\omega R^2}{2d}.$$

Первая треть ($U = \text{const}$): $dq = U\,dC$, $dW = d\left(\frac{CU^2}{2}\right) = \frac{U^2}{2}dC$, отсюда

$$P_1 = -\frac{U^2}{2}\frac{dC}{dt} = -\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)\omega R^2 U^2}{4d} = -4{,}6\text{ мкВт}.$$

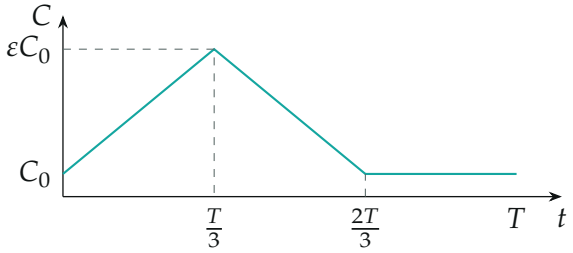
Мощность отрицательна: диэлектрик втягивается в конденсатор, и двигатель придерживает пластины.

Вторая треть ($q = \varepsilon C_0 U = \text{const}$, источник отключён): $P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right) = -\frac{q^2}{2C^2}\frac{dC}{dt} > 0$. Двигатель вытаскивает пластины из диэлектрика против силы втягивания. Мощность растёт по мере уменьшения C и наибольшая в конце трети, при $C = C_0$:

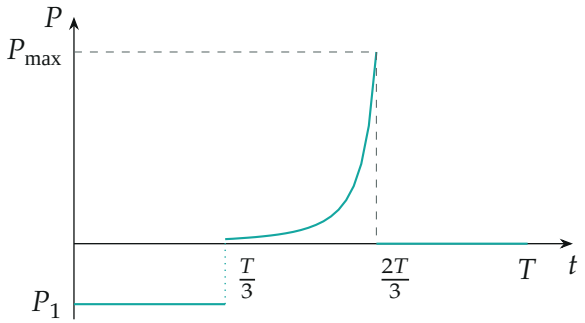
$$P_{\max} = \frac{(\varepsilon C_0 U)^2}{2C_0^2}\cdot\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)\omega R^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon^2(\varepsilon-1)\omega R^2 U^2}{4d},$$

$$P_{\max} = \varepsilon^2|P_1| = 0{,}20\text{ мВт}.$$

Последняя треть: ёмкость пластин не меняется, механическая работа не нужна, $P = 0$.



Ёмкость пластин за один оборот: растёт при въезде в диэлектрик, падает при выезде.



Мощность двигателя за один оборот (график P построен по формуле второй трети; масштаб по P — $P_{\max} = 42{,}25\,|P_1|$, отрицательная часть увеличена).

6. Куда уходит энергия. За вторую треть двигатель отдаёт $W = \frac{q_0'^2}{2C_0} - \frac{q_0'^2}{2\varepsilon C_0} = \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)C_0U^2}{2}$; в первую треть источник совершает работу $U(\varepsilon - 1)C_0U$, половина которой вернулась двигателю ($|P_1|T/3 = \frac{(\varepsilon-1)C_0U^2}{2}$). Эта энергия идёт в поле конденсатора C и в тепло в проводах при скачках заряда (в момент касания щётки), что согласуется с балансом.

Обратите внимание. Пока пластины подключены к источнику и въезжают в диэлектрик, мощность двигателя отрицательна — энергию отдаёт источник, а не двигатель. Наибольшая мощность нужна в конце выезда из диэлектрика, когда ёмкость наименьшая, а заряд прежний.

Ответ: $q_1 = \dfrac{\varepsilon C C_0 U}{C + C_0} = 0{,}17$ мкКл, $C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 \alpha R^2}{2d}$; $q_{\max} = \varepsilon C U = 1{,}4$ Кл; $P_{\max} = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon^2 (\varepsilon - 1) \omega R^2 U^2}{4d} = 0{,}20$ мВт.

Проверка. Размерность: $\frac{\varepsilon_0 R^2}{d}$ — Ф, $\Ф \cdot \text{В}^2 \cdot \text{с}^{-1} = \text{Дж/с} = \text{Вт}$. Предел $\varepsilon \to 1$: диэлектрика нет, $P_{\max} \to 0$, а $q_{\max} = CU$ — конденсатор просто заряжается до напряжения источника, верно. При $C \gg C_0$ $q_1 \approx \varepsilon C_0 U$ — весь заряд пластин.

Ответ. 1) $q_1 = \dfrac{\varepsilon C C_0 U}{C + C_0} \approx 0{,}17$ мкКл, где $C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 \alpha R^2}{2d}$; 2) $q_{\max} = \varepsilon C U = 1{,}4$ Кл; 3) $P_{\max} = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon^2 (\varepsilon - 1) \omega R^2 U^2}{4d} = 0{,}20$ мВт, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.