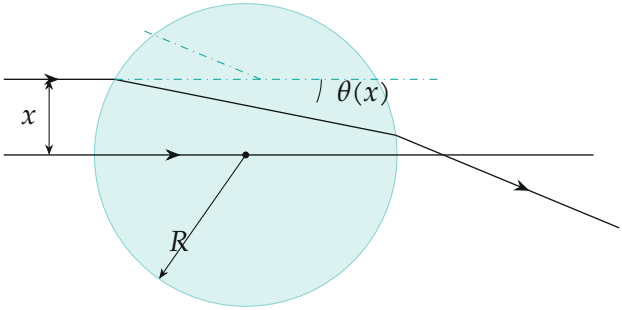
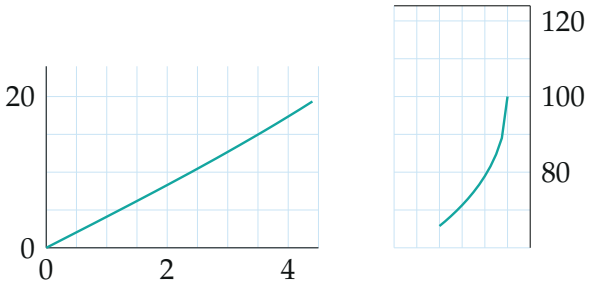
Угол отклонения луча в прозрачном шаре

Задача 5. [Курчатов 2023/24, 10 класс, задача 5] При исследовании оптических свойств прозрачного шара радиуса R была получена зависимость угла отклонения $\theta(x)$ луча от своего первоначального направления. Измерения проводили во всём доступном диапазоне $x \in [0, R]$. Лаборант построил график этой зависимости, отложив по вертикали угол отклонения θ в градусах, а по горизонтали — расстояние x в см, однако вечером уборщица порвала его и выбросила. Наутро лаборант в ужасе обнаружил только два кусочка этого графика, а таблицу измерений так и не смог найти. Помогите лаборанту подготовить отчёт по сохранившейся информации: определите показатель преломления n вещества шара, радиус R шара, расстояние l от центра шара до точки, в которой фокусируется пучок световых лучей, испущенный вдоль диаметра шара на малых расстояниях $x \ll R$.

Примечание: при малых углах α [рад] $\ll 1$ справедлива формула $\sin\alpha \approx \alpha$ [рад].





(а) (б)

Уцелевшие кусочки графика $\theta(x)$: (а) левый нижний угол, (б) правый верхний угол; по горизонтали x в см, по вертикали θ в градусах.

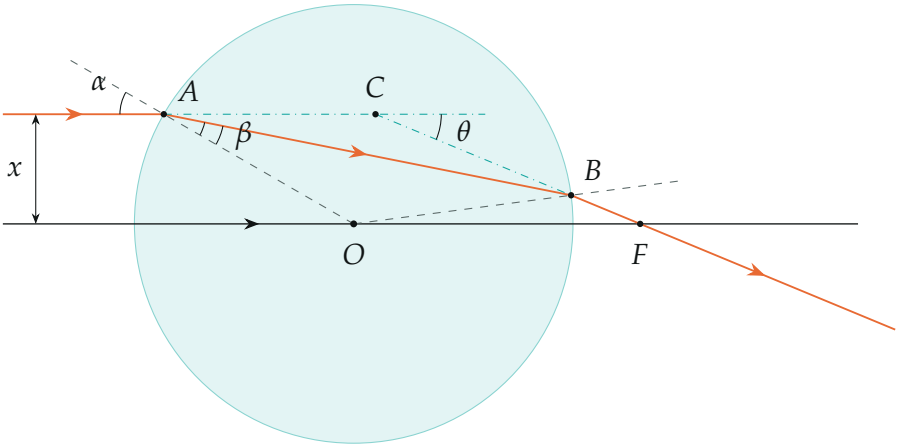
▲ **Решение. Что происходит.** Задача геометрической оптики: два преломления луча на сферической поверхности. Луч, идущий параллельно диаметру на расстоянии x, преломляется при входе и при выходе, каждый раз поворачиваясь к оси на угол $\alpha - \beta$. Получив формулу $\theta(x)$, читаем по кусочкам графика две величины: наибольший угол отклонения (при $x \to R$) даёт n, наклон начального участка (при $x \ll R$) — R. Фокус параксиального пучка найдём из геометрии того же хода луча.

Обозначения. A и B — точки входа и выхода луча, O — центр шара, α — угол падения (с радиусом OA), β — угол преломления, C — точка пересечения продолжений входящего и выходящего лучей, F — точка пересечения выходящего луча с осью.

1. Ход луча. Нормаль в точке падения — радиус OA, поэтому $\sin\alpha = \dfrac{x}{R}$. Закон преломления при входе:

$$\sin\alpha = n\sin\beta.$$

Треугольник AOB равнобедренный ($OA = OB = R$), поэтому внутри шара луч падает на поверхность под тем же углом β и выходит под углом α (рисунок 3).



Ход луча в шаре: пунктир — нормали (радиусы), C — пересечение продолжений лучей, F — точка пересечения выходящего луча с осью (построено для $x = R/2$, $n = 1{,}56$).

2. Угол отклонения. При каждом преломлении луч поворачивается на $\alpha - \beta$ в сторону оси. Угол θ — внешний угол треугольника ABC, он равен сумме двух несмежных с ним углов $\angle CAB = \angle CBA = \alpha - \beta$:

$$\theta(x) = 2(\alpha - \beta) = 2\Big(\arcsin\frac{x}{R} - \arcsin\frac{x}{nR}\Big).$$

Функция возрастает с x: при росте x угол α растёт быстрее β.

3. Показатель преломления. На кусочке (б) график обрывается на $\theta_{\max} \approx 100^\circ$ — это край доступного диапазона, $x \to R$, $\alpha \to 90^\circ$:

$$\theta_{\max} = 2\Big(90^\circ - \arcsin\frac{1}{n}\Big),$$

$$n = \frac{1}{\sin(90^\circ - \theta_{\max}/2)} = \frac{1}{\sin 40^\circ} \approx 1{,}56.$$

4. Радиус шара. На кусочке (а) график почти прямой: при $x = 4$ см $\theta \approx 16$–17°, наклон в начале $k = 4{,}0\,^\circ/\text{см} = 0{,}070$ рад/см. При $x \ll R$ углы малы, по примечанию $\alpha \approx \dfrac{x}{R}$, закон преломления $\alpha = n\beta$, и

$$\theta \approx 2\Big(\alpha - \frac{\alpha}{n}\Big) = \frac{2x}{R}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) = kx,$$

$$R = \frac{2}{k}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) = \frac{2 \cdot 0{,}357}{0{,}070}\ \text{см} \approx 10\ \text{см}.$$

Восстановленный по этим n и R график целиком — на рисунке 4; оба кусочка ложатся на него.

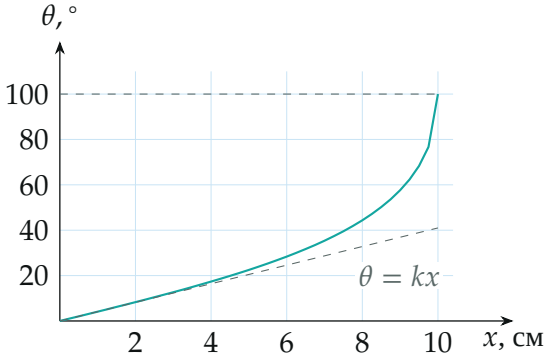


График $\theta(x)$ для $n = 1{,}56$, $R = 10$ см, построенный по формуле; пунктир — касательная в начале координат.

5. Фокус параксиального пучка. Прямая CO — общая ось симметрии равнобедренных треугольников AOB и ACB, поэтому она делит углы при вершинах пополам. В треугольнике OFC угол при F равен θ (выходящий луч наклонён к оси на θ), угол при C:

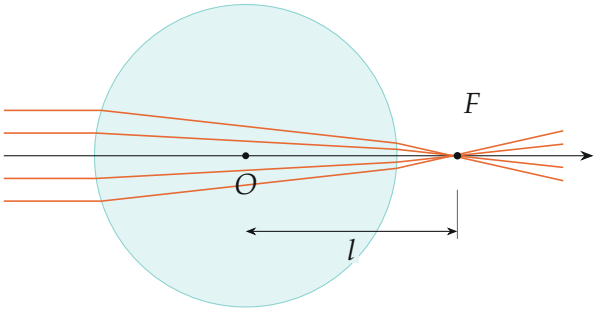
$$\angle OCF = \frac{1}{2}(\pi - 2(\alpha - \beta)) = \frac{\pi}{2} - \alpha + \beta,$$

а угол при O: $\pi - \theta - \angle OCF = \frac{\pi}{2} - \alpha + \beta$ — тот же. Треугольник OFC равнобедренный, $OF = CF = l$. Его площадь двумя способами (высота из C на сторону OF равна x):

$$\frac{1}{2}\, l^2 \sin\theta = \frac{1}{2}\, xl \quad \Rightarrow \quad l = \frac{x}{\sin\theta} \approx \frac{x}{\theta} = \frac{Rn}{2(n-1)}.$$

От x это не зависит: все лучи узкого пучка сходятся в одной точке (рисунок 5):

$$l = \frac{10 \cdot 1{,}556}{2 \cdot 0{,}556}\ \text{см} \approx 14\ \text{см}.$$



Узкий пучок вдоль диаметра (построено по точным формулам для $x = \pm 0{,}15R, \pm 0{,}3R$): после двух преломлений лучи сходятся в точке F на расстоянии $l = \frac{Rn}{2(n-1)}$ от центра.

6. Второй способ для l. Теорема синусов в треугольнике OBF ($\angle OBF = \pi - \alpha$, $\angle BFO = \theta$, $OB = R$, $OF = l$):

$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{l}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad l \approx R\,\frac{\alpha}{2(\alpha-\beta)} = R\,\frac{n\beta}{2(n-1)\beta} = \frac{Rn}{2(n-1)}.$$

Совпадает.

Обратите внимание. Фокус лежит вне шара ($l > R$) только при $n < 2$. При $n > 2$ лучи пересекают ось ещё внутри шара и выходят расходящимся пучком — тогда в точке F пересекаются лишь их продолжения. У нас $n = 1{,}56$: фокус действительный, на 4 см за поверхностью шара.

Ответ: $n = \dfrac{1}{\sin(90^\circ - \theta_{\max}/2)} \approx 1{,}56$; $R = \dfrac{2}{k}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \approx 10$ см; $l = \dfrac{Rn}{2(n-1)} \approx 14$ см.

Проверка. Размерности: k — рад/см, R — см, l — см. Предел $n \to 1$ (шар из воздуха): $\theta \to 0$, $l \to \infty$ — лучи не отклоняются. Число: точное $\theta(4\text{ см}) = 2(\arcsin 0{,}4 - \arcsin 0{,}257) = 17{,}4^\circ$ — как на кусочке (а); $\theta(10\text{ см}) = 100^\circ$ — как на кусочке (б).

Ответ. $n = \dfrac{1}{\sin(90^\circ - \theta_{\max}/2)} \approx 1{,}56$; $R = \dfrac{2}{k}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \approx 10$ см ($k \approx 4^\circ/\text{см}$); $l = \dfrac{Rn}{2(n-1)} \approx 14$ см.