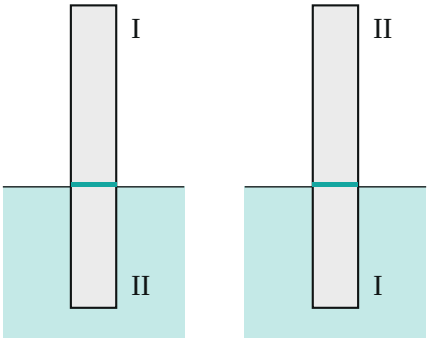
Кирпич с двумя отметками

Задача 1. [Курчатов 2023/24, 7 класс, задача 1] Даша опускает тело в форме кирпича с квадратным основанием в воду сначала одной квадратной гранью, затем другой. В обоих случаях кирпич плавает, и Даша делает отметку на кирпиче в том месте, где он соприкасается с водой. Оказалось, что расстояние между двумя отметками равно $h = 5$ см. Считая, что каждый раз кирпич погружался в воду меньше, чем наполовину, рассчитайте длину наибольшего ребра L. Плотность тела однородна и равна $\rho = 400$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3.



Поясняющий рисунок: кирпич плавает стоя, сначала гранью II вниз, затем гранью I вниз; бирюзовая черта — отметка на уровне воды.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на плавание тел (закон Архимеда). Кирпич плавает «стоя» на квадратной грани, его наибольшее ребро L вертикально. Глубина погружения d в обоих случаях одна и та же — кирпич однородный и симметричный, — но отсчитывается от разных концов. Поэтому две отметки стоят на расстоянии d от каждого из концов, и между ними остаётся $L - 2d$. Главная идея: из условия плавания найти d через L, затем связать с расстоянием h.

Обозначения. b — сторона квадратного основания, $S = b^2$ — его площадь; d — глубина погружения; L — искомое наибольшее ребро; ось y — вертикально вверх.

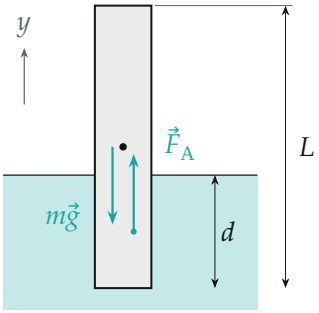
1. Условие плавания. На кирпич действуют сила тяжести $m\vec{g}$ (вниз, из центра) и сила Архимеда $\vec{F}_\text{A}$ (вверх) — рисунок 2. Второй закон Ньютона для кирпича в покое в проекции на ось y:

$$F_\text{A} - mg = 0, \qquad F_\text{A} = \rho_\text{в} g\, Sd, \qquad m = \rho SL.$$

Отсюда

$$\rho_\text{в} Sd = \rho SL \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\rho}{\rho_\text{в}} L = 0{,}4\, L.$$

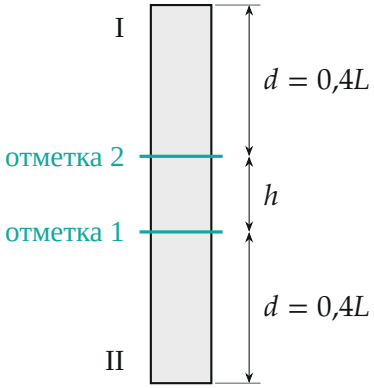
Площадь основания сократилась: глубина погружения зависит только от отношения плотностей и длины L.



Силы на плавающий кирпич: сила Архимеда равна весу воды в объёме погружённой части Sd.

2. Где стоят отметки. В первый раз отметка — на расстоянии d от нижней грани (II). Во второй раз вниз опущена грань I, и отметка — на расстоянии d от неё (рисунок 3). Кирпич погружён меньше чем наполовину ($d < \frac{L}{2}$), поэтому отметки не перекрываются, и между ними

$$h = L - 2d.$$

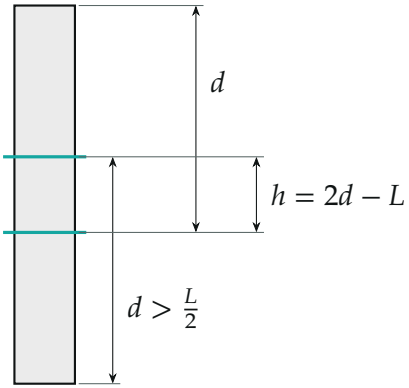


Кирпич после опыта (в масштабе, $L = 25$ см): отметки на расстоянии d от концов, между ними $h = L - 2d$.

3. Длина ребра. Подставим $d = \frac{\rho}{\rho_в} L$:

$$h = L - 2\frac{\rho}{\rho_в} L = L\left(1 - \frac{2\rho}{\rho_в}\right) \quad \Rightarrow \quad L = \frac{h}{1 - 2\rho/\rho_в} = \frac{5}{1 - 0{,}8} = 25 \text{ см}.$$

4. Если бы кирпич тонул больше чем наполовину. Тогда отметки поменялись бы местами, и $h = 2d - L$ (рисунок 4). Условие задачи исключает этот случай; при $\rho = 400$ кг/м^3 он и невозможен: $d = 0{,}4L < 0{,}5L$.



Другой случай (не наш): тело плотнее половины плотности воды, отметки «перехлёстываются».

Обратите внимание. Отметки отсчитываются от разных концов: в первый раз от грани II, во второй — от грани I. Поэтому расстояние между ними — не разность глубин (она равна нулю), а $L - 2d$.

Проверка. При $L = 25$ см: $d = 10$ см, $L - 2d = 5$ см $= h$ — верно. Размерность: см / (безразмерное) = см. Предел: при $\rho \to 0$ кирпич почти не тонет, $d \to 0$, отметки у концов и $h \to L$ — формула даёт $L = h$, верно.

Смысл: доля погружённой длины равна отношению плотностей 0,4, на «пустую середину» остаётся $1 - 0{,}8 = 0{,}2$ длины — это и есть 5 см.

Ответ. $L = \dfrac{h}{1 - 2\rho/\rho_{\text{в}}} = 25$ см.