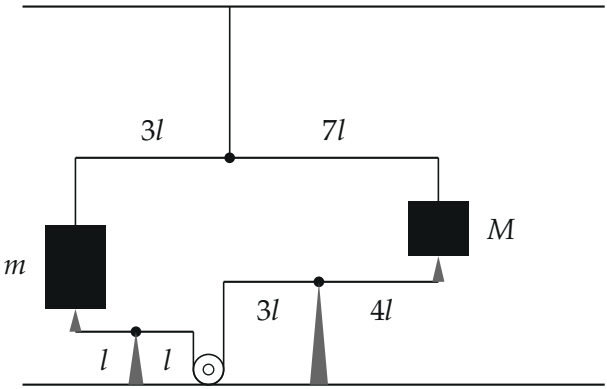
Система рычагов с двумя грузами

Задача 3. [Курчатов 2023/24, 7 класс, задача 3] На рисунке приведена система рычагов. Все рычаги находятся в горизонтальном положении. Два груза массами m и M закреплены на тонких нерастяжимых невесомых нитях на плечах большого рычага и на соответствующих плечах малых рычагов, как показано на рисунке. Внутренние плечи малых рычагов связаны натянутой нерастяжимой невесомой нитью. Длины плеч всех рычагов отмечены на рисунке. Найдите отношение $\frac{m}{M}$, если известно, что сила, действующая на левое плечо большого рычага, равна половине силы тяжести, действующей на груз массы m.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на равновесие рычагов. Каждый груз висит сразу на двух опорах: сверху его держит нить большого рычага, снизу он связан с плечом малого рычага. Часть силы тяжести груза берёт на себя большой рычаг, остаток передаётся на малый рычаг. Малые рычаги связаны нитью через блок и поэтому тянут друг друга одной и той же силой. Ключевой закон — правило моментов: рычаг в равновесии, если момент силы, поворачивающей его по часовой стрелке, равен моменту силы, поворачивающей против часовой стрелки. Моменты удобно считать относительно оси рычага: сила, приложенная к оси, момента не создаёт, и её не нужно знать.

Обозначения. T_1 и T_2 — силы натяжения нитей, на которых грузы m и M висят на большом рычаге; F_1 и F_2 — силы, с которыми грузы m и M

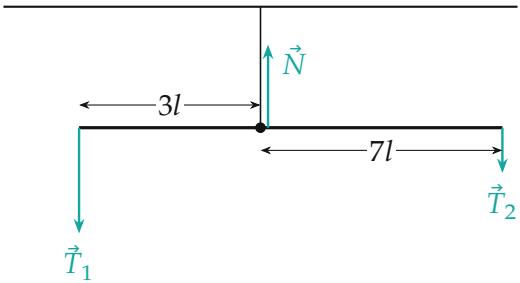
давят на плечи малых рычагов; T — сила натяжения нити, связывающей малые рычаги.

1. Большой рычаг. На него действуют нити грузов: слева $\vec{T}_1$ на плече $3l$, справа $\vec{T}_2$ на плече $7l$ (рисунок 2), обе вниз; подвес к потолку приложен к оси. Правило моментов относительно оси большого рычага:

$$T_1 \cdot 3l = T_2 \cdot 7l \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{3}{7} T_1.$$

По условию $T_1 = \dfrac{mg}{2}$, поэтому

$$T_2 = \frac{3}{7} \cdot \frac{mg}{2} = \frac{3}{14} mg.$$



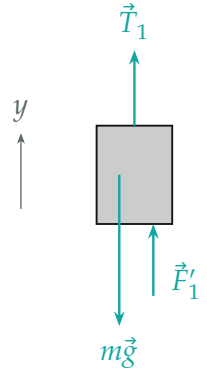
Силы на большой рычаг. Сила подвеса $\vec{N}$ приложена к оси, её момент относительно оси равен нулю.

2. Груз m. На груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$ вниз, натяжение нити $\vec{T}_1$ вверх и сила $\vec{F}_1'$ со стороны малого рычага (рисунок 3). Груз покоится, значит, силы уравновешены (второй закон Ньютона с нулевым ускорением, проекция на вертикаль):

$$T_1 + F_1' - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1' = mg - T_1 = \frac{mg}{2}.$$

Ответ положительный: малый рычаг подпирает груз снизу. По третьему закону Ньютона груз давит на левое плечо малого рычага с силой $F_1 = F_1' = \dfrac{mg}{2}$, направленной вниз.

Так же для груза M: $F_2 = Mg - T_2 = Mg - \dfrac{3}{14}mg$, сила давления на правое плечо правого малого рычага направлена вниз.



Силы на груз m: нить сверху держит половину силы тяжести, вторую половину — малый рычаг снизу.

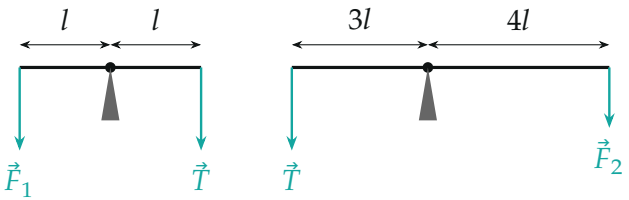
3. Малые рычаги. Нить, связывающая малые рычаги, огибает блок и тянет вниз и правый конец левого рычага, и левый конец правого рычага, обе с силой T: нить невесомая, блок идеальный (рисунок 4).

Правило моментов для левого малого рычага (плечи l и l):

$$F_1 \cdot l = T \cdot l \quad \Rightarrow \quad T = F_1 = \frac{mg}{2}.$$

Правило моментов для правого малого рычага (плечи $3l$ и $4l$):

$$T \cdot 3l = F_2 \cdot 4l \quad \Rightarrow \quad \frac{mg}{2} \cdot 3 = \left(Mg - \frac{3}{14}mg\right) \cdot 4.$$



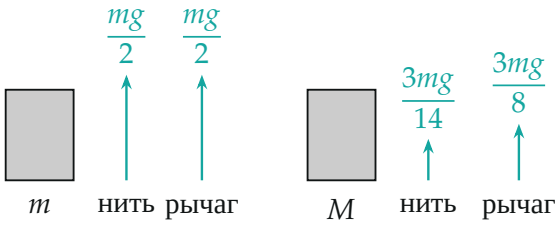
Силы на малые рычаги (силы опор приложены к осям и не нарисованы). Нить через блок тянет оба внутренних плеча вниз одной силой T.

4. Отношение масс. Раскроем скобки и разделим на g:

$$\frac{3}{2}m = 4M - \frac{6}{7}m \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3}{2}+\frac{6}{7}\right)m = 4M \quad \Rightarrow \quad \frac{33}{14}m = 4M.$$

Отсюда

$$\frac{m}{M} = \frac{4\cdot 14}{33} = \frac{56}{33} \approx 1{,}7.$$



Кто держит каждый груз: у груза m сила тяжести делится поровну между нитью и малым рычагом; у груза M нить держит $\frac{3}{14}mg$, малый рычаг — $F_2 = \frac{3}{4}T = \frac{3}{8}mg$.

Обратите внимание. Сила, которую груз передаёт малому рычагу, — не mg, а $mg - T_1$: часть силы тяжести груза уже держит нить большого рычага. Если подставить в правило моментов для малых рычагов полные силы тяжести, ответ выйдет неверным.

Ответ:

$$\frac{m}{M} = \frac{4}{\frac{3}{2}+\frac{6}{7}} = \frac{56}{33} \approx 1{,}7.$$

Проверка. Отношение масс безразмерно, как и должно быть. Сумма сил на груз M: $T_2 + F_2 = \frac{3}{14}mg + \frac{3}{8}mg = \frac{33}{56}mg$; при $m = \frac{56}{33}M$ это ровно Mg — груз M в равновесии. Груз m тяжелее груза M: его большой рычаг держит на коротком плече $3l$ и поэтому сильнее нагружен.

Ответ. $\dfrac{m}{M} = \dfrac{56}{33} \approx 1{,}7.$