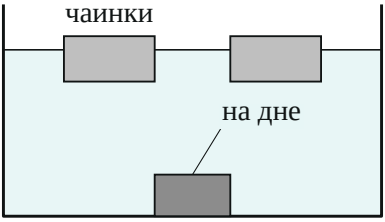
Чаинки в чайнике

Задача 4. [Курчатов 2023/24, 7 класс, задача 4] При заваривании чая чаинки, помещённые в воду, сначала плавают на поверхности воды, а затем медленно опускаются на дно чайника. Это связано с изменением массы и объёма чаинок при контакте с водой. Сразу после попадания в чайник чаинки погружены в воду на 70% своего объёма. Через некоторое время масса чаинок увеличивается на 50%. При каком максимально возможном увеличении своего объёма чаинки начнут опускаться на дно? Ответ дайте в процентах от исходного значения объёма чаинок.



Поясняющий рисунок: свежие чаинки плавают у поверхности, набухшие опускаются на дно.

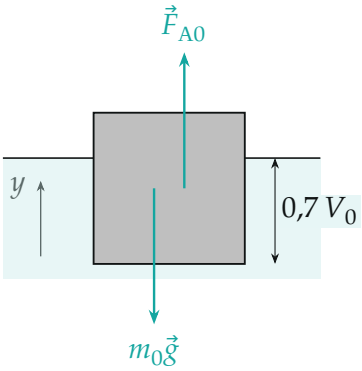
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на условие плавания тел. Тело плавает, пока наибольшая возможная сила Архимеда — при полном погружении — не меньше силы тяжести. Чаинка впитывает воду: масса растёт на 50%, объём тоже растёт, а значит, растёт и наибольшая сила Архимеда. Если объём вырос мало, сила тяжести обгоняет выталкивающую силу, и чаинка тонет. Ключевой закон — закон Архимеда вместе с условием равновесия плавающего тела.

Обозначения. m_0, V_0 — масса и объём чаинки сразу после попадания в воду; $m_1 = 1{,}5\,m_0$, V_1 — масса и объём через некоторое время; $\rho_в$ — плотность воды. Ось y направим вверх.

1. Чаинка сначала плавает. Под водой 70% объёма, то есть $0{,}7\,V_0$ (рисунок 2). Сила Архимеда равна весу воды в объёме погружённой части: $F_{A0} = \rho_в g \cdot 0{,}7\,V_0$. Второй закон Ньютона для чаинки в проекции на ось y (чаинка покоится):

$$\rho_в g \cdot 0{,}7\,V_0 - m_0 g = 0 \quad \Rightarrow \quad m_0 = 0{,}7\,\rho_в V_0.$$

Это значит, что средняя плотность свежей чаинки равна $0{,}7\,\rho_в$.



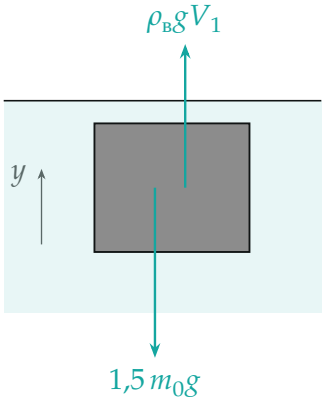
Свежая чаинка плавает: под водой 70% объёма, сила Архимеда равна силе тяжести.

2. Когда чаинка начинает тонуть. Чаинка с массой $m_1 = 1{,}5\,m_0$ и объёмом V_1 при полном погружении испытывает наибольшую силу Архимеда $\rho_в g V_1$ (рисунок 3). Она пойдёт ко дну, если и этой силы не хватает, чтобы удержать чаинку:

$$\rho_в g V_1 \le m_1 g = 1{,}5\,m_0 g.$$

Подставим m_0 из шага 1:

$$\rho_в V_1 \le 1{,}5 \cdot 0{,}7\,\rho_в V_0 \quad \Rightarrow \quad V_1 \le 1{,}05\,V_0.$$

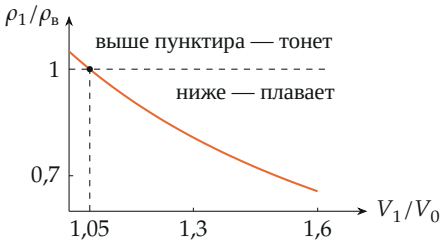


Набухшая чаинка целиком под водой. Если сила тяжести больше наибольшей силы Архимеда, чаинка тонет.

3. Ответ в процентах. Наибольший объём, при котором чаинка ещё тонет, $V_1 = 1{,}05\, V_0$, то есть увеличение объёма

$$\frac{V_1 - V_0}{V_0} \cdot 100\% = (1{,}05 - 1) \cdot 100\% = 5\%.$$

Если объём вырастет больше чем на 5%, средняя плотность чаинки останется меньше плотности воды, и она будет плавать. Рисунок 4 показывает это через плотность: $\rho_1 = \dfrac{1{,}5\, m_0}{V_1} = \dfrac{1{,}05}{V_1/V_0}\, \rho_в$.



Средняя плотность набухшей чаинки (масса $1{,}5\, m_0$) в зависимости от объёма; выше пунктира $\rho_1 > \rho_в$ — чаинка тонет.

Обратите внимание. В момент, когда чаинка начинает тонуть, она уже целиком под водой, поэтому в силу Архимеда входит весь объём V_1, а не 70% от него.

Ответ: чаинки начнут тонуть, если их объём увеличится не больше чем на

$$\frac{V_1 - V_0}{V_0} = 1{,}5 \cdot 0{,}7 - 1 = 0{,}05 = 5\%.$$

Проверка. Через плотности: свежая чаинка имеет плотность $0{,}7\,\rho_в$; масса выросла в 1,5 раза, объём — в 1,05 раза, плотность стала $0{,}7 \cdot \frac{1{,}5}{1{,}05}\rho_в = \rho_в$ — ровно граница плавания. Если бы объём не менялся, плотность стала бы $1{,}05\,\rho_в$ и чаинка утонула бы; именно запас 5% и может «съесть» набухание.

Ответ. Не больше чем на 5%: $V_1 \le 1{,}5 \cdot 0{,}7\,V_0 = 1{,}05\,V_0$.