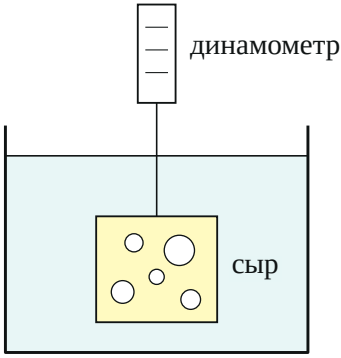
Сыр с дырками и динамометр

Задача 5. [Курчатов 2023/24, 7 класс, задача 5] Вероника купила в супермаркете некоторое количество сыра, представляющего собой кубик размерами 5 см × 5 см × 5 см для необычных экспериментов с динамометром. Внутри сыра имеются дырки, которые образуются в процессе его созревания. Сначала она измерила вес сыра, погрузив его целиком в воду, и получила $P_1 = 0{,}26$ Н. Дополнительно Вероника расплавила сыр на водяной бане, отметив, что масса сыра после его затвердевания не изменилась, а объём уменьшился на 10%. Определите плотность монолитного сыра без дырок по результатам эксперимента Вероники, предполагая, что после его расплавления и затвердевания дырок в сыре не осталось. Плотность воды $\rho_в = 1$ г/см^3. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Поясняющий рисунок: кубик сыра с дырками висит на динамометре целиком в воде.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон Архимеда и среднюю плотность. Динамометр в воде показывает разность силы тяжести сыра и силы Архимеда; сила Архимеда зависит от полного объёма кубика вместе с дырками. Расплавив сыр, Вероника убрала дырки, не меняя массы: уменьшение объёма — это и есть объём дырок. Масса и объём монолитного сыра известны — плотность найдена. Ключевые законы — закон Архимеда и условие равновесия тела на динамометре.

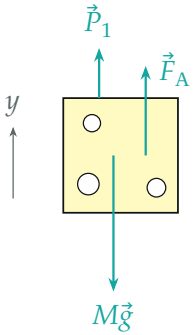
Обозначения. $V = a^3$ — объём кубика с дырками, $a = 5$ см; M — масса сыра; $V_д$ — объём дырок; $V_с = V - V_д$ — объём монолитного сыра; $\rho_с$ — его плотность. Ось y направим вверх.

1. Масса сыра из показания динамометра. На кубик в воде действуют сила тяжести $M\vec{g}$, сила Архимеда $\vec{F}_A$ и сила натяжения пружины динамометра $\vec{P}_1$ (рисунок 2); показание динамометра равно модулю этой силы. Кубик погружён целиком, поэтому выталкивает воду в объёме V:

$$F_A = \rho_в g V.$$

Второй закон Ньютона для кубика в проекции на ось y (кубик покоится):

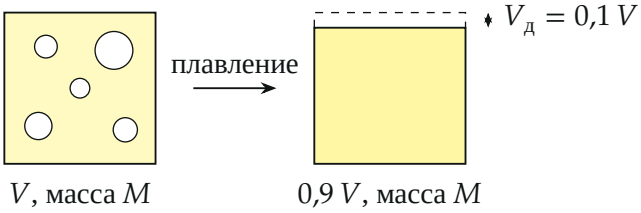
$$P_1 + \rho_в g V - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{P_1}{g} + \rho_в V.$$



Силы на кубик сыра в воде: сила тяжести уравновешена силой Архимеда и силой со стороны пружины динамометра.

2. Объём дырок. После плавления дырок не осталось, масса та же, а объём уменьшился на 10% (рисунок 3). Значит, исчез объём дырок:

$$V_д = 0{,}1\,V, \qquad V_с = V - V_д = 0{,}9\,V.$$



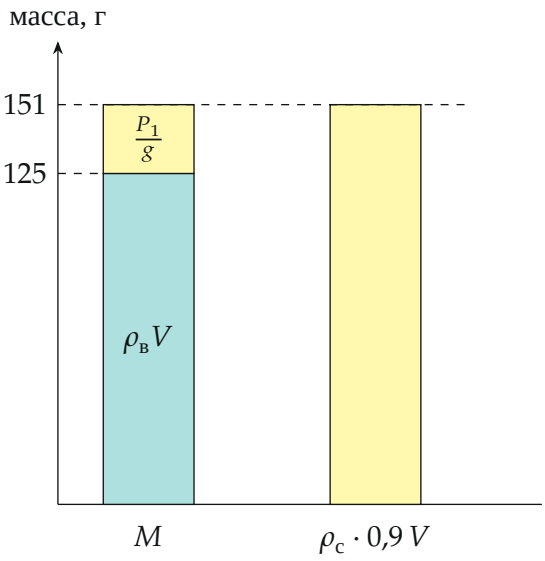
Расплавленный и застывший сыр: масса та же, объём меньше ровно на объём дырок.

3. Плотность монолитного сыра. Вся масса M — это масса монолитного сыра (масса воздуха в дырках ничтожна по сравнению с массой сыра):

$$\rho_с = \frac{M}{V_с} = \frac{\dfrac{P_1}{g} + \rho_в V}{0{,}9\,V} = \frac{10}{9}\left(\frac{P_1}{gV} + \rho_в\right).$$

Числа: $V = 125$ см^3, $\dfrac{P_1}{g} = \dfrac{0{,}26}{10}$ кг $= 26$ г, $M = 26 + 125 = 151$ г,

$$\rho_с = \frac{151\text{ г}}{112{,}5\text{ см}^3} \approx 1{,}34\text{ г/см}^3.$$



Баланс масс: масса сыра равна массе воды в объёме кубика (125 г) плюс то, что показал динамометр (26 г); та же масса занимает $0{,}9\,V$ без дырок.

Обратите внимание. Сила Архимеда считается по полному объёму кубика с дырками: вода выталкивает всё, что занимает место под водой. А масса в плотности монолитного сыра делится только на объём без дырок.

Ответ:

$$\rho_с = \frac{10}{9}\left(\frac{P_1}{gV} + \rho_в\right) \approx 1{,}34\ \text{г/см}^3.$$

Проверка. Размерность: $\dfrac{P_1}{gV}$ — это кг/м^3, как и $\rho_в$. Предел: если бы динамометр показал нуль ($P_1 = 0$), сыр с дырками плавал бы «безразлично» — его средняя плотность равна $\rho_в$, а без дырок $\dfrac{10}{9}\rho_в$, как и должно быть. Средняя плотность кубика с дырками $151/125 \approx 1{,}21$ г/см^3 меньше плотности монолита — дырки её понижают.

Ответ. $\rho_с = \dfrac{10}{9}\left(\dfrac{P_1}{gV} + \rho_в\right) \approx 1{,}34$ г/см^3.