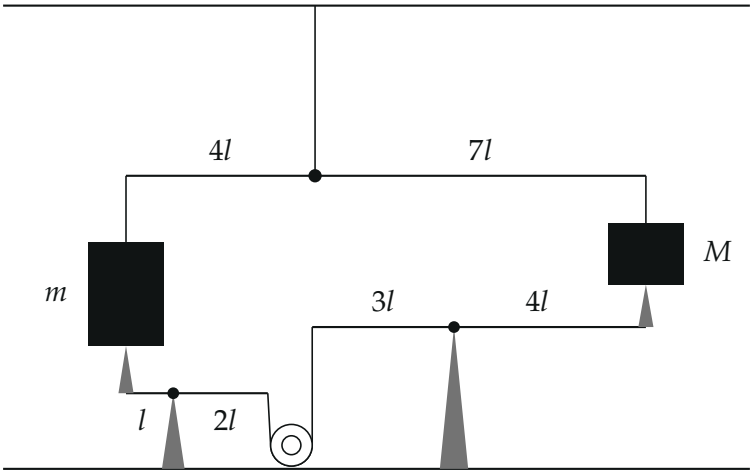
Система рычагов с двумя грузами

Задача 2. [Курчатов 2023/24, 8 класс, задача 2] На рисунке приведена система рычагов. Все рычаги находятся в горизонтальном положении. Два груза массами m и M закреплены на тонких нерастяжимых невесомых нитях на плечах большого рычага и на соответствующих плечах малых рычагов, как показано на рисунке. Внутренние плечи малых рычагов связаны натянутой нерастяжимой невесомой нитью. Длины плеч всех рычагов отмечены на рисунке. Найдите отношение $\frac{m}{M}$, если известно, что сила, действующая на левое плечо большого рычага, равна половине силы тяжести, действующей на груз массы m.



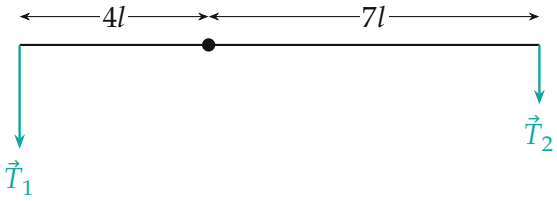
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие рычагов (правило моментов) вместе с равновесием грузов. Каждый груз держат сразу две опоры: нить большого рычага сверху и штырёк малого рычага снизу. Груз m давит на свой малый рычаг, тот через нить и блок тянет вниз второй малый рычаг, а на него давит груз M. Главная идея: идти по цепочке «большой рычаг → груз → малый рычаг → нить → другой малый рычаг → другой груз», каждый раз записывая условие равновесия одного тела.

Обозначения. T_1, T_2 — натяжения нитей левого и правого плеч большого рычага; N_1, N_2 — силы, с которыми штырьки малых рычагов да-

вят на грузы m и M (по третьему закону Ньютона грузы давят на штырьки так же); T_3 — натяжение нити между малыми рычагами. Рычаги, нити и блок невесомы, блок только меняет направление нити, натяжение T_3 одно по всей нити.

1. Большой рычаг. На него действуют нити грузов (тянут концы вниз силами T_1 и T_2) и подвес (рисунок 2). Правило моментов относительно точки подвеса: моменты, вращающие против и по часовой стрелке, равны:

$$T_1 \cdot 4l = T_2 \cdot 7l \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{4}{7} T_1 = \frac{4}{7} \cdot \frac{mg}{2} = \frac{2}{7} mg.$$



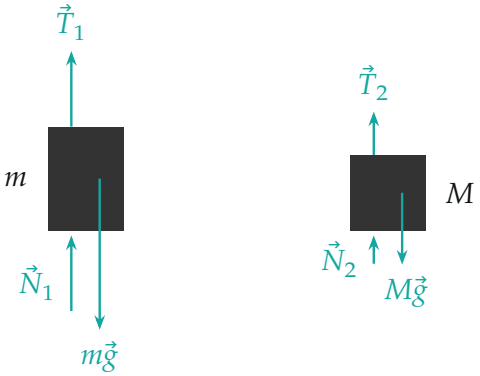
Силы нитей на большой рычаг (сила подвеса приложена в опоре, её момент равен нулю). Плечо T_2 длиннее, поэтому $T_2 = \frac{4}{7} T_1$ меньше.

2. Грузы. Груз m покоится: нить тянет его вверх силой T_1, штырёк толкает вверх силой N_1, вниз — сила тяжести (рисунок 3). Второй закон Ньютона в проекции на вертикаль:

$$T_1 + N_1 - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = mg - \frac{mg}{2} = \frac{mg}{2}.$$

Так же для груза M:

$$T_2 + N_2 - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 = Mg - \frac{2}{7} mg.$$



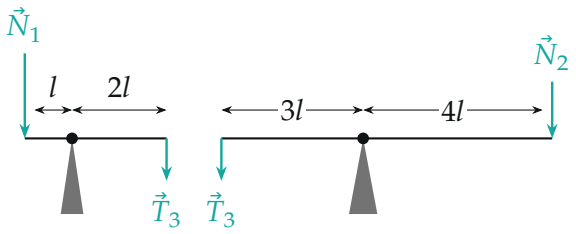
Силы на грузы: каждый держат нить сверху и штырёк малого рычага снизу.

3. Левый малый рычаг. Груз m давит на конец плеча l силой N_1 вниз, нить на конце плеча $2l$ тянет вниз силой T_3 (она уходит вниз к блоку). Силы по разные стороны от опоры, поэтому они вращают рычаг в разные стороны (рисунок 4). Правило моментов относительно опоры:

$$N_1 \cdot l = T_3 \cdot 2l \quad \Rightarrow \quad T_3 = \frac{N_1}{2} = \frac{mg}{4}.$$

4. Правый малый рычаг. Нить, обогнув блок, тянет вниз конец плеча $3l$ силой T_3; груз M давит вниз на конец плеча $4l$ силой N_2. Правило моментов:

$$T_3 \cdot 3l = N_2 \cdot 4l \quad \Rightarrow \quad \frac{mg}{4} \cdot 3 = \left(Mg - \frac{2}{7}mg\right) \cdot 4.$$



Силы на малые рычаги (реакции опор не показаны — их момент относительно опоры равен нулю). Нить через блок тянет оба внутренних плеча вниз одной силой T_3.

5. Отношение масс. Разделим уравнение шага 4 на g и раскроем скобки:

$$\frac{3}{4}m = 4M - \frac{8}{7}m \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{3}{4} + \frac{8}{7}\right)m = 4M \quad \Rightarrow$$

$$\frac{53}{28}m = 4M \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{M} = \frac{112}{53} \approx 2{,}11.$$

Обратите внимание. Блок разворачивает нить: оба внутренних плеча малых рычагов тянутся *вниз*. Поэтому на левом рычаге сила T_3 уравновешивает давление груза m с другой стороны опоры, а на правом — давление груза M.

Проверка. Подставим $m = 112$, $M = 53$ (в единицах массы, $g = 1$; python): $T_1 = 56$, $T_2 = 32$ ($56 \cdot 4 = 32 \cdot 7 = 224$ — большой рычаг в равновесии); $N_1 = 56$, $T_3 = 28$ ($56 \cdot 1 = 28 \cdot 2$); $N_2 = 53 - 32 = 21$, $28 \cdot 3 = 21 \cdot 4 = 84$ — все рычаги в равновесии, все силы положительны (штырьки давят, нити натянуты). Масса m больше M: груз m сам наполовину лежит на штырьке, и ему приходится держать через рычаги заметную долю груза M.

Ответ. $\dfrac{m}{M} = \dfrac{112}{53} \approx 2{,}1.$