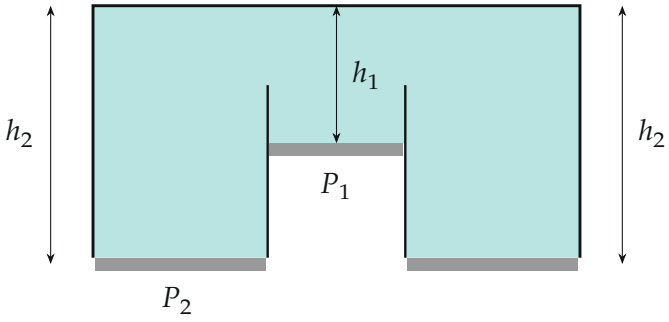
Герметичный сосуд с тремя поршнями

Задача 3. [Курчатов 2023/24, 8 класс, задача 3] Имеется герметичный сосуд, изображённый на рисунке. Снизу сосуда на жидкость давят три поршня, два из них расположены на расстоянии $h_2 = 10$ см от верхней крышки сосуда, ещё один — на высоте h_1 от верхней крышки сосуда. Давление одного из нижних поршней на жидкость составляет $P_2 = 3000$ Па, давление верхнего поршня составляет $P_1 = 2500$ Па. Найдите значение h_1. Ответ выразите в сантиметрах. Плотность жидкости $\rho = 1000\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.



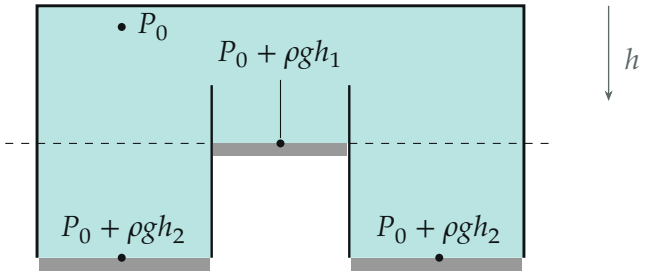
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на гидростатическое давление. Сосуд закрыт, поэтому давление у крышки P_0 — неизвестное, не атмосферное: его создают сами поршни. Внутри жидкости давление растёт с глубиной по закону $p = P_0 + \rho g h$, где h — глубина под крышкой. Поршень в равновесии давит на жидкость с тем давлением, которое в жидкости на его уровне. Главная идея: два поршня на разных глубинах дают два уравнения с двумя неизвестными P_0 и h_1.

Обозначения. P_0 — давление жидкости у верхней крышки; h — глубина под крышкой; ось h направим вниз от крышки.

1. Давление в жидкости. Жидкость покоится и связна (верхняя часть сосуда общая, рисунок 2). По закону гидростатики давление на глубине h под крышкой

$$p(h) = P_0 + \rho g h.$$

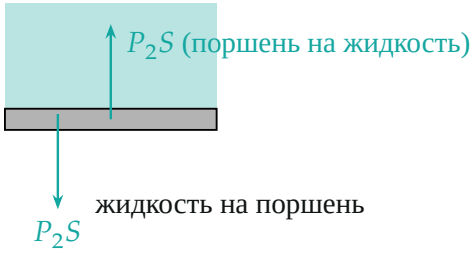
На одной глубине давление одинаково во всей жидкости, поэтому оба нижних поршня давят одинаково — P_2; какой из них дан в условии, неважно.



Давление в точках жидкости. Штриховая линия — уровень верхнего поршня: на этой глубине давление одинаково и в боковых частях сосуда.

2. Условие равновесия поршней. Поршень неподвижен, значит, жидкость давит на него так же, как он на неё (третий закон Ньютона и равновесие поршня, рисунок 3). Для нижнего поршня (глубина h_2) и верхнего (глубина h_1):

$$P_2 = P_0 + \rho g h_2, \qquad P_1 = P_0 + \rho g h_1.$$



Поршень площадью S и жидкость давят друг на друга равными силами; поэтому «давление поршня на жидкость» — это давление в жидкости у поршня.

3. Давление у крышки. Из первого уравнения

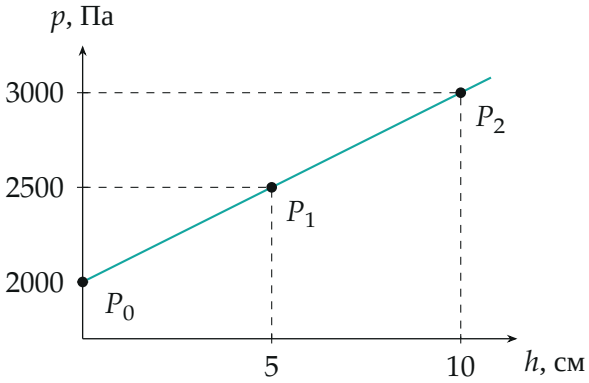
$$P_0 = P_2 - \rho g h_2 = 3000 - 1000 \cdot 10 \cdot 0{,}10 = 2000 \text{ Па}.$$

4. Высота h_1. Вычтем первое уравнение из второго, P_0 сократится:

$$P_1 - P_2 = \rho g\,(h_1 - h_2),$$

$$h_1 = h_2 - \frac{P_2 - P_1}{\rho g} = 0{,}10 - \frac{500}{10^4} = 0{,}05 \text{ м} = 5 \text{ см}.$$

График $p(h)$ — прямая с наклоном ρg (рисунок 4): по нему h_1 находится там, где давление равно P_1.



Давление в жидкости растёт с глубиной линейно: 500 *Па разницы — это* 5 *см столба воды. Ось давления начинается не с нуля.*

Обратите внимание. Давление у крышки $P_0 = 2000$ Па — не атмосферное: сосуд герметичен, и давление внутри определяют поршни. Из-за этого нельзя писать $P_1 = \rho g h_1$ — вышло бы $h_1 = 25$ см, больше высоты сосуда.

Проверка. Размерность: $\frac{\text{Па}}{(\text{кг/м}^3)(\text{м/с}^2)} = \text{м}$. Знак: верхний поршень давит слабее ($P_1 < P_2$), значит, он ближе к крышке, $h_1 < h_2$ — так и вышло. Подстановка: $2000 + 10^4 \cdot 0{,}05 = 2500$ Па $= P_1$.

Смысл: разность давлений поршней равна весу столба жидкости между их уровнями на единицу площади.

Ответ. $h_1 = h_2 - \dfrac{P_2 - P_1}{\rho g} = 5$ см.