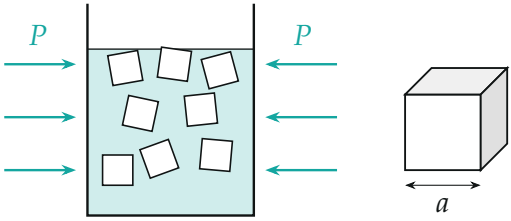
Лимонад со льдом

Задача 4. [Курчатов 2023/24, 8 класс, задача 4] Студент Миша купил в магазине неохлаждённый лимонад «Буратино» массой $m = 300$ г и температурой $T_1 = 20\,^\circ\text{C}$. Чтобы охладить его до температуры $T_2 = 10\,^\circ\text{C}$, Миша добавил восемь кубиков льда длиной ребра $a = 2$ см. Известно, что мощность передачи теплоты окружающего воздуха к смеси лимонада и льда $P = 25$ Дж/с, т.е. воздух медленно нагревает смесь.

1. Рассчитайте, как долго напиток будет оставаться охлаждённым. Ответ выразите в минутах и округлите до десятых.
2. Определите температуру напитка через 10 минут после добавления льда. Ответ выразите в °C и округлите до десятых.

Удельные теплоёмкости лимонада и воды одинаковы и равны $c = 4{,}2$ кДж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 334$ кДж/кг, плотность льда $\rho_{\text{льда}} = 900$ кг/м^3.



лимонад m и 8 кубиков льда

Поясняющий рисунок: лёд в лимонаде, воздух подводит к смеси теплоту с мощностью P; справа — кубик льда с ребром a.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на тепловой баланс с плавлением и с подводом теплоты извне. Лимонад отдаёт теплоту льду, лёд тает; одновременно воздух каждую секунду добавляет смеси $P = 25$ Дж. Удобно сравнивать не промежуточные состояния, а начало и нужный момент: энергия, которую подвёл воздух, плюс теплота, отданная лимонадом, равны теплоте, полученной льдом и талой водой. Напиток «охлаждённый», пока его температура не выше $T_2 = 10\,^\circ\text{C}$.

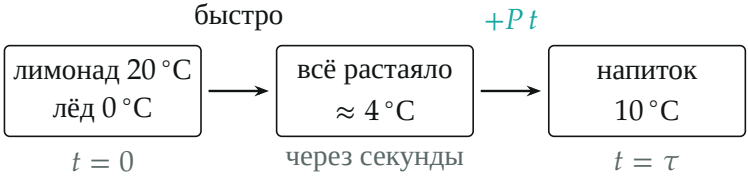
Обозначения. $m_л$ — масса льда (лёд при 0 °C — его температура в условии не дана, так считают и организаторы); τ — время, через которое напиток нагреется до T_2; $\Delta T = T_1 - T_2 = 10$ °C; θ — температура через $t = 10$ мин $= 600$ с.

Пункт 1.

1. Масса льда. Восемь кубиков объёмом a^3:

$$m_л = 8a^3\rho_{льда} = 8 \cdot (0{,}02)^3 \cdot 900 = 0{,}0576 \text{ кг} = 57{,}6 \text{ г}.$$

2. Что происходит сразу после того, как бросили лёд. Остыв до 0 °C, лимонад отдал бы $cm \cdot 20 = 25\,200$ Дж, а на плавление всего льда нужно $\lambda m_л = 19\,238$ Дж — меньше. Значит, лёд растает быстро, и напиток станет холоднее 10 °C (в шаге 5 найдём: около 4 °C). Затем воздух медленно его нагревает (рисунок 2).



Ход процесса: лёд тает почти сразу и переохлаждает напиток, затем воздух медленно греет его до 10 °C.

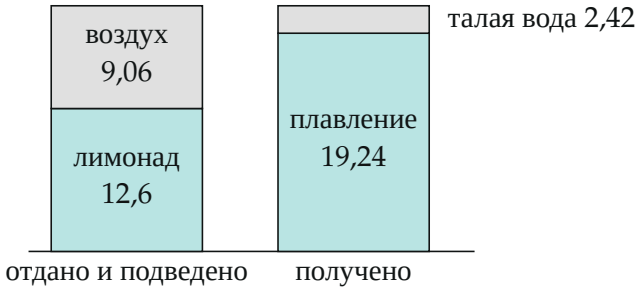
3. Тепловой баланс от начала до момента τ. К моменту τ лёд растаял, вся смесь массой $m + m_л$ имеет температуру T_2. Полученная теплота равна отданной плюс подведённой воздухом (рисунок 3):

$$\underbrace{\lambda m_л + cm_л(T_2 - 0)}_{\text{лёд и талая вода}} = \underbrace{cm\,\Delta T}_{\text{лимонад}} + \underbrace{P\tau}_{\text{воздух}}.$$

Отсюда

$$\tau = \frac{\lambda m_л + cm_л T_2 - cm\,\Delta T}{P},$$

$$\tau = \frac{19\,238 + 2419 - 12\,600}{25} = \frac{9058}{25} \approx 362 \text{ с} \approx 6{,}0 \text{ мин}.$$



Баланс от начала до момента τ (в кДж): лимонад, остывая на 10 °C, отдаёт 12,6 кДж, остальные 9,06 кДж на плавление льда и нагрев талой воды до 10 °C даёт воздух.

Пункт 2.

4. После момента τ. Льда нет, напиток массой $m + m_л = 0{,}3576$ кг нагревается только воздухом. За оставшиеся $t - \tau = 600 - 362 = 238$ с:

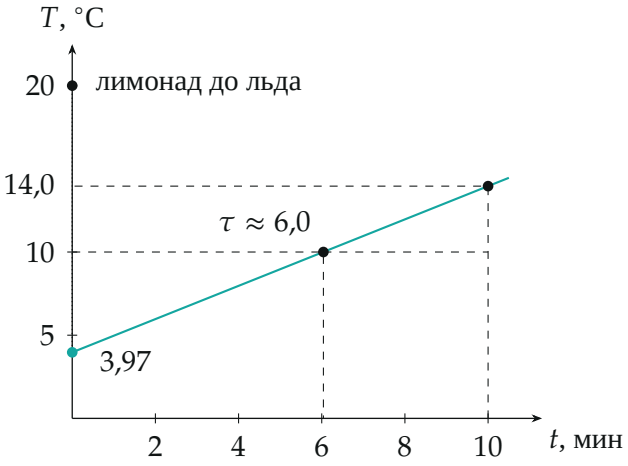
$$c\,(m + m_л)\,(\theta - T_2) = P\,(t - \tau),$$

$$\theta = T_2 + \frac{P\,(t - \tau)}{c\,(m + m_л)} = 10 + \frac{25 \cdot 238}{4200 \cdot 0{,}3576} \approx 14{,}0\,^\circ\text{C}.$$

5. Второй способ — через всю историю. Сразу после таяния льда (воздух за короткое время почти ничего не добавил) температура T_0 находится из баланса $cm(T_1 - T_0) = \lambda m_л + cm_л T_0$:

$$T_0 = \frac{cmT_1 - \lambda m_л}{c\,(m + m_л)} = \frac{25\,200 - 19\,238}{1502} \approx 3{,}97\,^\circ\text{C}.$$

Дальше напиток теплоёмкостью $C = c(m + m_л) = 1502$ Дж/°C нагревается равномерно: $T(t) = T_0 + \dfrac{P}{C}\,t$, на 1 °C за 60 с (рисунок 4). Отсюда $\tau = \dfrac{(10 - 3{,}97) \cdot 1502}{25} \approx 362$ с и $T(600\text{ с}) = 3{,}97 + 9{,}99 \approx 14{,}0\,^\circ\text{C}$ — то же.



Температура напитка: лёд почти сразу тает, напиток охлаждается до $\approx 4\,^\circ C$*, затем воздух нагревает его по* $1\,^\circ C$ *в минуту;* $10\,^\circ C$ *— через* 6,0 *мин, через* 10 *мин —* $14{,}0\,^\circ C$*.*

Обратите внимание. Время τ не зависит от того, как именно таял лёд: баланс шага 3 связывает только начало и конец. Важно учесть нагрев талой воды от 0 до 10 °C (слагаемое $cm_л T_2$) — без него вышло бы $\tau \approx 4{,}4$ мин. После таяния льда греется уже 357,6 г, а не 300 г.

Проверка. Размерность: $\frac{\text{Дж}}{\text{Дж/с}} = \text{с}$, $\frac{\text{Дж}}{\text{Дж/°С}} = \text{°С}$. Численно (python): оба способа дают $\tau = 362{,}3$ с и $\theta = 13{,}96\,^\circ$C. Знак: $\tau > 0$ — льда хватает, чтобы охладить ниже 10 °C.

Смысл: восемь маленьких кубиков охлаждают стакан лимонада примерно до 4 °C, но воздух отыгрывает градус в минуту, и холодным напиток остаётся всего шесть минут.

Ответ. 1) $\tau = \dfrac{\lambda m_л + cm_л T_2 - cm(T_1 - T_2)}{P} \approx 6{,}0$ мин; 2) $\theta \approx 14{,}0\,^\circ$C.