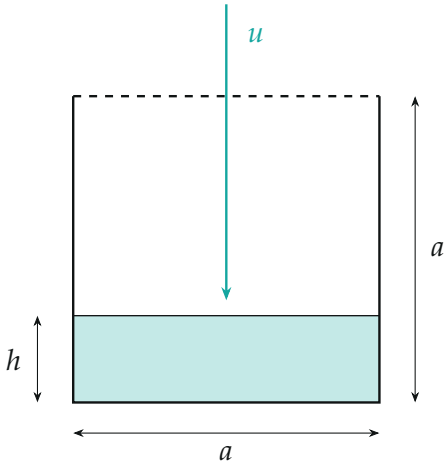
Куб, наполняемый водой: самый низкий центр масс

Задача 5. [Курчатов 2023/24, 8 класс, задача 5] С целью тестирования на устойчивость в куб массой $M = 300$ г и длиной ребра $a = 12$ см наливают воду со скоростью $u = 6{,}4$ г/с. Определите момент времени, когда центр масс куба с набранной в него водой окажется ниже всего, если куб фиксирован в пространстве и не двигается. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3. Ширину стенки куба не учитывать.



Поясняющий рисунок: в неподвижный куб (стенки и дно, без крышки) сверху льётся вода, её уровень h растёт.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на центр масс системы тел. Центр масс пустого куба — в его середине, на высоте $a/2$. Сначала вода ложится ниже него и тянет общий центр масс вниз. Когда воды много, она поднимает центр масс обратно: полный куб снова имеет центр масс на высоте $a/2$. Значит, есть самое низкое положение. Главная идея: добавка воды опускает центр масс, пока она ложится ниже его, и поднимает, когда выше; поэтому центр масс ниже всего, когда он находится ровно на уровне воды.

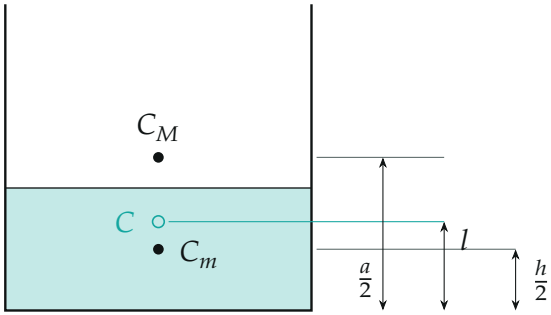
Обозначения. h — высота воды в кубе; $m = \rho a^2 h$ — масса воды; l — высота центра масс системы куб + вода над дном; $t = m/u$ — время наполнения.

1. Центр масс системы. Центр масс куба (тонкие стенки) — на высоте $\frac{a}{2}$, центр масс воды (однородный слой) — на высоте $\frac{h}{2}$ (рисунок 2). По определению центра масс

$$l = \frac{M \cdot \frac{a}{2} + m \cdot \frac{h}{2}}{M + m}.$$

Это то же, что правило моментов для «рычага» с грузами M и m, подвешенного в точке l:

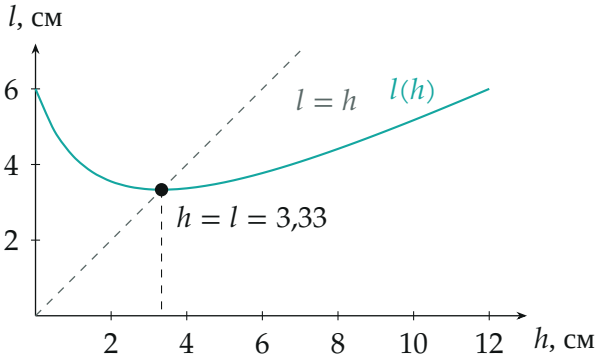
$$M\left(\frac{a}{2} - l\right) = m\left(l - \frac{h}{2}\right).$$



Центры масс: куба C_M (середина), воды C_m (середина слоя), системы C — между ними, ближе к более тяжёлому.

2. Когда центр масс ниже всего. Добавим немного воды Δm: она ложится сверху слоя, на высоте h. Новый центр масс системы — между старым C (масса $M + m$, высота l) и добавкой (высота h). Если $h < l$, добавка опускает центр масс; если $h > l$ — поднимает (рисунок 3). Сначала $h = 0 < l = \frac{a}{2}$, центр масс опускается, l уменьшается, а h растёт — пока они не сравняются. Самое низкое положение:

$$l = h.$$



Высота центра масс l от уровня воды h (python). Минимум кривой лежит ровно на прямой $l = h$: слева от неё вода ложится ниже центра масс, справа — выше.

3. Уровень воды. Подставим $l = h$ и $m = \rho a^2 h$ в правило моментов:

$$M\left(\frac{a}{2} - h\right) = \rho a^2 h \cdot \frac{h}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho a^2 h^2 + 2Mh - Ma = 0.$$

Корень этого квадратного уравнения (положительный, второй отрицателен и смысла не имеет):

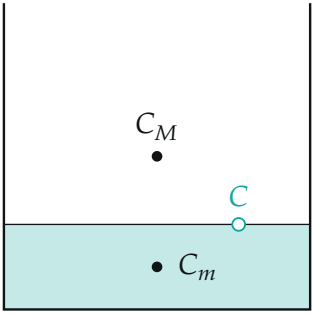
$$h = \frac{M\left(\sqrt{1 + \frac{\rho a^3}{M}} - 1\right)}{\rho a^2}.$$

Числа: $\frac{\rho a^3}{M} = \frac{1000 \cdot 0{,}001728}{0{,}3} = 5{,}76$, $\sqrt{6{,}76} = 2{,}6$,

$$h = \frac{0{,}3 \cdot 1{,}6}{1000 \cdot 0{,}0144} = 0{,}0333 \text{ м} = 3{,}33 \text{ см}.$$

4. Время. Масса воды $m = \rho a^2 h = 0{,}48$ кг $= 480$ г; она набирается за

$$t = \frac{m}{u} = \frac{M}{u}\left(\sqrt{1 + \frac{\rho a^3}{M}} - 1\right) = \frac{300}{6{,}4} \cdot 1{,}6 = 75 \text{ с}.$$



уровень воды 3,33 см,
центр масс на нём,
$t = 75$ с

Самое низкое положение: центр масс системы C лежит на поверхности воды; 480 г воды против 300 г куба.

Обратите внимание. Условие «центр масс на уровне воды» — не случайное совпадение, а условие экстремума: в этот момент новая порция воды добавляется ровно на высоте центра масс и не сдвигает его. Пока воды мало ($h < l$), каждая порция ещё опускает центр масс.

Проверка. Подстановка: $l = \dfrac{0{,}3 \cdot 0{,}06 + 0{,}48 \cdot 0{,}0167}{0{,}78} = 0{,}0333\,\text{м} = h$ — верно. Численно (python): минимум $l(h)$ на сетке — при $h = 3{,}33$ см, $l_{\min} = 3{,}33$ см. Размерность: $\frac{M}{u}$ — секунды, корень безразмерный. Предел: при $M \to 0$ (невесомый куб) $t \to 0$ — центр масс сразу у дна, так и должно быть.

Смысл: центр масс ниже всего, когда воды налито 480 г — больше массы самого куба, хотя её уровень всего 3,3 см; дальше вода только поднимает центр масс.

Ответ. $t = \dfrac{M}{u}\left(\sqrt{1 + \dfrac{\rho a^3}{M}} - 1\right) = 75$ с (уровень воды 3,33 см).