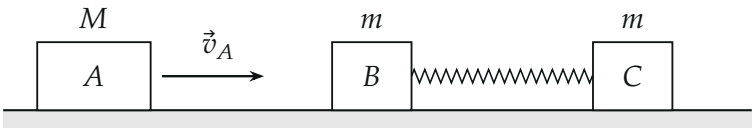
Три бруска, пружина и упругий удар

Задача 1. [Курчатов 2023/24, 9 класс, задача 1] На гладком горизонтальном столе лежат два одинаковых бруска B и C, соединённых недеформированной пружиной. Масса каждого бруска $m = 0{,}15$ кг. С бруском B абсолютно упруго сталкивается брусок A массой $M = 0{,}55$ кг, движущийся с горизонтальной скоростью $v_A = 8$ м/с, направленной вдоль пружины. Считая, что за время столкновения пружина не успевает деформироваться, найдите следующие величины:

1. Отношение энергии $x = Q/E_A$, где Q — энергия относительных колебаний брусков B и C после столкновения, E_A — начальная кинетическая энергия бруска A.
2. Значение отношения масс $\alpha = \dfrac{M}{m}$, при котором величина x будет максимальна.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на законы сохранения при ударе. Удар мгновенный: пружина не успевает сжаться, поэтому в ударе участвуют только A и B — упругий удар двух тел. Брусок C в момент удара покоится. После удара пара $B + C$ движется как целое (со скоростью центра масс) и одновременно колеблется: брусок B уходит вперёд, пружина сжимается. Энергия колебаний Q — та часть кинетической энергии пары, которая не связана с движением её центра масс.

Обозначения. v'_A — скорость A после удара; v_B — скорость B сразу после удара; v_c — скорость центра масс пары $B + C$; ось x — по $\vec{v}_A$; $\alpha = M/m$.

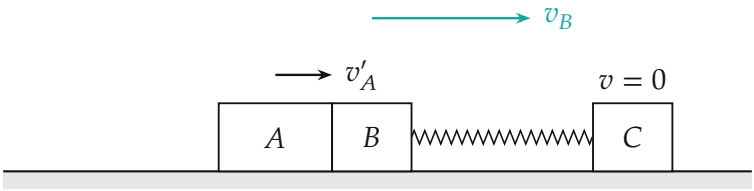
1. Упругий удар A и B. Закон сохранения импульса системы $A + B$ за время удара (внешние горизонтальные силы отсутствуют, пружина ещё не деформирована) и закон сохранения кинетической энергии (удар

абсолютно упругий):

$$Mv_A = Mv'_A + mv_B, \qquad \frac{Mv_A^2}{2} = \frac{Mv_A'^2}{2} + \frac{mv_B^2}{2}.$$

Перепишем: $M(v_A - v'_A) = mv_B$ и $M(v_A - v'_A)(v_A + v'_A) = mv_B^2$; деля второе на первое, $v_A + v'_A = v_B$. Отсюда

$$v'_A = \frac{M-m}{M+m}\,v_A \approx 4{,}57 \text{ м/с}, \qquad v_B = \frac{2M}{M+m}\,v_A \approx 12{,}57 \text{ м/с}.$$

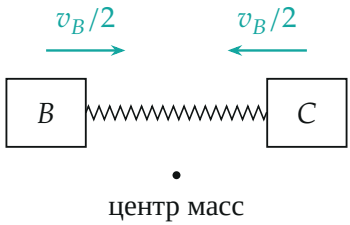


Сразу после удара: A медленнее, B получил скорость v_B, C ещё покоится, пружина не деформирована.

2. Движение центра масс пары. После удара на пару $B + C$ горизонтальные внешние силы не действуют, её центр масс движется равномерно со скоростью

$$v_c = \frac{mv_B + m \cdot 0}{2m} = \frac{v_B}{2} = \frac{M}{M+m}\,v_A \approx 6{,}29 \text{ м/с}.$$

В системе центра масс бруски B и C движутся навстречу друг другу со скоростями $\pm v_B/2$ — это и есть колебания.



В системе центра масс пары бруски движутся навстречу с равными скоростями: энергия этого движения — энергия колебаний Q.

3. Пункт 1: энергия колебаний. Энергия пары = энергия движения центра масс + энергия относительного движения (теорема Кёнига):

$$\frac{mv_B^2}{2} = \frac{2mv_c^2}{2} + Q \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_B^2}{4} = \frac{mv_B^2}{4} = \frac{Mv_A^2}{2}\cdot\frac{2Mm}{(M+m)^2}.$$

Делим на $E_A = Mv_A^2/2$:

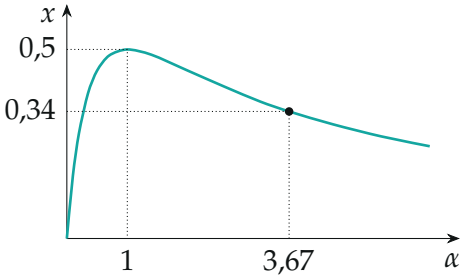
$$x = \frac{Q}{E_A} = \frac{2Mm}{(M+m)^2} = \frac{2\alpha}{(1+\alpha)^2} = \frac{2\cdot 3{,}67}{4{,}67^2} \approx 0{,}34.$$

Второй способ: Q — энергия, которую потерял A, минус энергия центра масс пары. $E_A - \dfrac{Mv_A'^2}{2} = \dfrac{mv_B^2}{2}$, и пара делит её поровну между движением центра масс и колебаниями (у двух равных масс $\frac{2mv_c^2}{2} = \frac{mv_B^2}{4}$). Совпало.

4. Пункт 2: максимум. По неравенству о среднем $\dfrac{1+\alpha}{2} \geq \sqrt{\alpha}$, то есть $(1+\alpha)^2 \geq 4\alpha$:

$$x = \frac{2\alpha}{(1+\alpha)^2} \leq \frac{1}{2},$$

равенство — при $\alpha = 1$. Физически: при $M = m$ брусок A отдаёт B всю свою энергию и останавливается, а половина её уходит в колебания.



Доля энергии, ушедшей в колебания, $x(\alpha) = 2\alpha/(1+\alpha)^2$ (по точкам); максимум $0{,}5$ при $\alpha = 1$, в условии $\alpha \approx 3{,}67$ и $x \approx 0{,}34$.

Обратите внимание. Q — не «потерянная при ударе» энергия: удар упругий, механическая энергия сохраняется. Q — энергия колебаний пружинной пары, она остаётся механической.

Проверка. x безразмерно. Пределы: $\alpha \to 0$ (лёгкий A) — он отскакивает почти без передачи энергии, $x \to 0$; $\alpha \to \infty$ (тяжёлый A) — B получает скорость $2v_A$, но это ничтожная доля огромной E_A, $x \to 0$. Обе границы верны, между ними — максимум.

Смысл: в колебания уходит до половины энергии налетающего бруска, и больше всего — при равных массах A и B.

Ответ. 1) $x = \dfrac{2Mm}{(M+m)^2} \approx 0{,}34$; 2) $\alpha = 1$ (тогда $x = 0{,}5$).