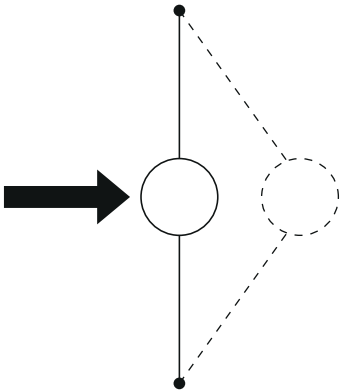
Боксёрский мяч на двух резинках

Задача 3. [Курчатов 2023/24, 9 класс, задача 3] Боксёрский тренировочный мяч, имеющий массу m, закреплён между двумя одинаковыми эластичными резинками длиной l, как показано на рисунке. Каждая резинка обладает такой жёсткостью k, что при приложении силы, равной mg, длина резинки увеличивается до $2l$. Верхняя и нижняя резинки закреплены к потолку и полу соответственно в помещении высотой $4l$. Сначала мячу придают небольшое вертикальное смещение и отпускают. После затухания колебаний мячу аналогично придают небольшое горизонтальное смещение и отпускают. Найдите отношение периода вертикальных колебаний к периоду горизонтальных колебаний. Радиус мяча $r \ll l$. Для малых углов α при расчётах принять $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha$.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача о малых колебаниях тела на упругих связях. Мяч висит между двумя растянутыми резинками. При вертикальном смещении меняются растяжения обеих резинок — возвращает мяч их упругость. При горизонтальном смещении длины резинок почти не меняются, зато резинки поворачиваются, и возвращает мяч горизонтальная составляющая уже имеющегося натяжения. Главная идея: для каждого направления найти «эффективную жёсткость» $k_{\text{эф}}$ — коэффициент в возвращающей силе $F = -k_{\text{эф}}x$; тогда период $T = 2\pi\sqrt{m/k_{\text{эф}}}$, как у груза на пружине.

Обозначения. Индекс 1 — верхняя резинка (мяч — потолок), индекс 2 — нижняя (мяч — пол); x_1, x_2 — их растяжения в равновесии, $L_1 = l + x_1$, $L_2 = l + x_2$ — длины; $T_1 = kx_1$, $T_2 = kx_2$ — силы натяжения; $T_в$ и $T_г$ — периоды вертикальных и горизонтальных колебаний (в официальном решении T' и T''). Ось y — вертикально вниз, ось x — горизонтально.

1. Жёсткость резинки. По условию сила mg растягивает резинку на $2l - l = l$. Закон Гука: $kl = mg$, то есть

$$k = \frac{mg}{l}.$$

2. Положение равновесия. Высота комнаты $4l$, радиус мяча мал, поэтому сумма длин резинок $L_1 + L_2 = 4l$, а сумма растяжений

$$x_1 + x_2 = 4l - 2l = 2l.$$

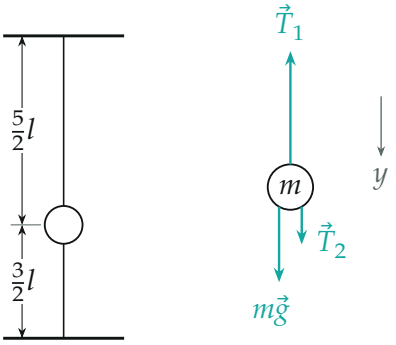
Обе резинки растянуты, значит, обе тянут мяч: верхняя — вверх, нижняя — вниз (рисунок 2). Второй закон Ньютона для мяча в покое в проекции на ось y (вниз):

$$mg + T_2 - T_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad kx_1 - kx_2 = mg = kl \quad \Rightarrow \quad x_1 - x_2 = l.$$

Вместе с $x_1 + x_2 = 2l$:

$$x_1 = \frac{3}{2}l, \qquad x_2 = \frac{1}{2}l,$$

$$L_1 = \frac{5}{2}l, \qquad L_2 = \frac{3}{2}l, \qquad T_1 = \frac{3}{2}mg, \qquad T_2 = \frac{1}{2}mg.$$



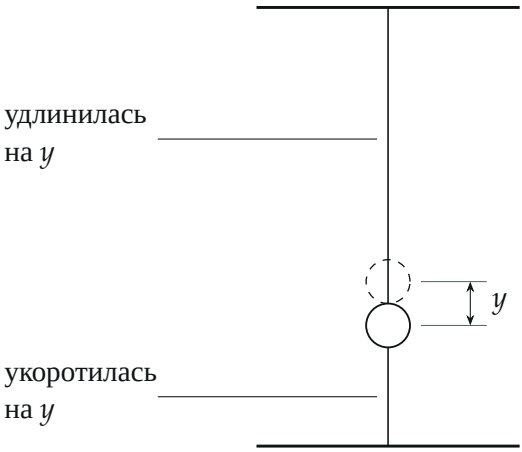
Равновесие: верхняя резинка длиной $\frac{5}{2}l$ тянет вверх силой $T_1 = \frac{3}{2}mg$, нижняя длиной $\frac{3}{2}l$ тянет вниз силой $T_2 = \frac{1}{2}mg$. Длины стрелок — по модулю: $T_1 = mg + T_2$.

3. Вертикальные колебания. Сместим мяч вниз на y: верхняя резинка удлиняется на y, нижняя укорачивается на y (она остаётся растянутой, пока $y < \frac{l}{2}$). Второй закон Ньютона для мяча в проекции на ось y:

$$ma_y = mg + k\left(\frac{l}{2} - y\right) - k\left(\frac{3l}{2} + y\right) = mg - kl - 2ky = -2ky.$$

Возвращающая сила пропорциональна смещению, эффективная жёсткость — сумма жёсткостей двух резинок, $k_в = 2k$ (рисунок 3): обе резинки «работают» против смещения. Период

$$T_в = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}.$$



Вертикальное смещение на y: сила верхней резинки растёт на ky, сила нижней падает на ky, итог — $2ky$ против смещения.

4. Горизонтальные колебания. Сместим мяч вбок на малое x (рисунок 4). Резинки отклоняются от вертикали на малые углы θ и φ:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{L_1} = \frac{2x}{5l}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{L_2} = \frac{2x}{3l}.$$

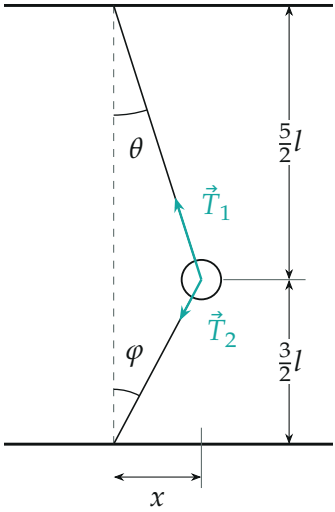
Длина верхней резинки стала $L_1/\cos\theta \approx L_1(1+\frac{\theta^2}{2})$ — изменение второго порядка по x, поэтому натяжения в первом порядке остаются равными T_1 и T_2. Обе резинки тянут мяч назад, к вертикали. Второй закон Ньютона в проекции на ось x (с $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha$ по условию):

$$ma_x = -T_1\sin\theta - T_2\sin\varphi = -\Big(\frac{T_1}{L_1} + \frac{T_2}{L_2}\Big)x,$$

$$ma_x = -\Big(\frac{\frac{3}{2}kl}{\frac{5}{2}l} + \frac{\frac{1}{2}kl}{\frac{3}{2}l}\Big)x = -\Big(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\Big)kx = -\frac{14}{15}\,kx.$$

Эффективная жёсткость $k_\text{г} = \frac{14}{15}k$ — здесь возвращает натяжение, а не удлинение: каждая резинка даёт «жёсткость» T/L. Период

$$T_\text{г} = 2\pi\sqrt{\frac{15m}{14k}}.$$



Горизонтальное смещение (по горизонтали масштаб увеличен): натяжения прежние, но их горизонтальные составляющие $T_1 \sin\theta$ и $T_2 \sin\varphi$ обе направлены к вертикали.

5. Отношение периодов.

$$\frac{T_\text{в}}{T_\text{г}} = \sqrt{\frac{k_\text{г}}{k_\text{в}}} = \sqrt{\frac{14/15}{2}} = \sqrt{\frac{7}{15}} \approx 0{,}68.$$

Обратите внимание. При горизонтальном смещении в возвращающую силу входит натяжение, накопленное в равновесии, а не жёсткость k напрямую. Нижняя резинка натянута слабее, но и короче, поэтому её вклад $T_2/L_2 = \frac{1}{3}k$ сравним со вкладом верхней $\frac{3}{5}k$.

Проверка. Размерность: T/L — это Н/м, как у жёсткости. Второй способ для горизонтали: в официальном решении сила записана через $\frac{5l}{2\cos\theta} - l$ и $\frac{3l}{2\cos\varphi} - l$; при малых углах $\cos \approx 1$ и выходит то же $F = kl(\frac{3}{2}\operatorname{tg}\theta + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi) = \frac{14}{15}kx$. Численно (python): $\sqrt{7/15} = 0{,}683$. Горизонтальная жёсткость меньше вертикальной, значит, горизонтальные колебания медленнее, $T_\text{в} < T_\text{г}$ — отношение меньше единицы.

Ответ. $\dfrac{T_\text{в}}{T_\text{г}} = \sqrt{\dfrac{7}{15}} \approx 0{,}68.$