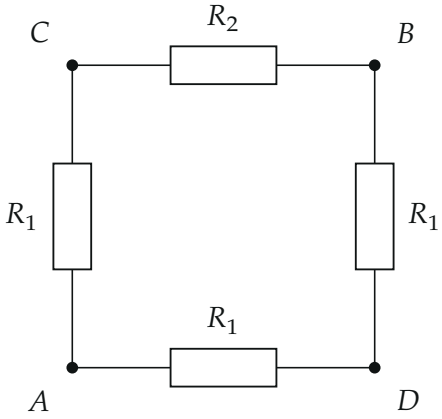
Цепь из четырёх выводов и мощности

Задача 4. [Курчатов 2023/24, 9 класс, задача 4] Рассмотрите схему электрической цепи, изображённую на рисунке. Подключая клеммы источника постоянного напряжения к разным парам точек из набора $\{A, B, C, D\}$, можно получить три различных значения мощности тока в цепи. Известно, что значения двух наибольших мощностей относятся как $1:3$, причём сопротивление $R_1 > R_2$. Найдите отношение $\dfrac{R_1}{R_2}$ и определите, во сколько раз наибольшая возможная мощность больше наименьшей возможной мощности.



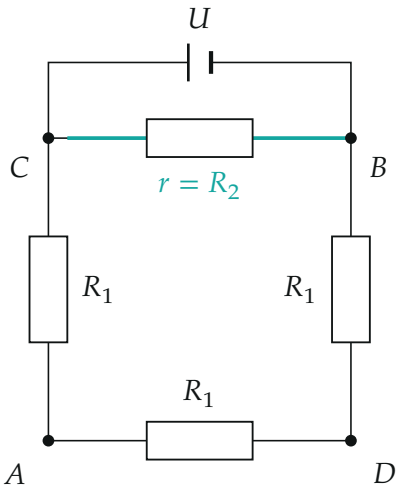
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на расчёт сопротивления цепи и мощности при постоянном напряжении. Четыре резистора образуют кольцо. Какую бы пару точек ни подключить к источнику, кольцо распадается на две ветви, соединённые параллельно. Мощность при постоянном напряжении U равна $P = U^2/R$: чем меньше сопротивление между клеммами, тем больше мощность. Главная идея: перебрать пары, найти три разных сопротивления, упорядочить их при $R_1 > R_2$ и использовать данное отношение.

Обозначения. U — напряжение источника; R_{XY} и P_{XY} — сопротивление цепи и мощность при подключении к точкам X и Y; $S = 3R_1 + R_2$

— сумма всех четырёх сопротивлений; $n = R_1/R_2$ — искомое отношение.

1. Сопротивление между двумя точками кольца. Подключим источник к точкам X и Y. Ток от X к Y идёт двумя путями по кольцу: одна ветвь имеет сопротивление r, другая — всё остальное, $S - r$ (рисунок 2). Ветви соединены параллельно, поэтому

$$R_{XY} = \frac{r\,(S-r)}{r + (S-r)} = \frac{r\,(S-r)}{S}.$$



Источник подключён к C и B: одна ветвь — резистор R_2 (бирюзовая), вторая — три резистора R_1 по кругу через A и D.

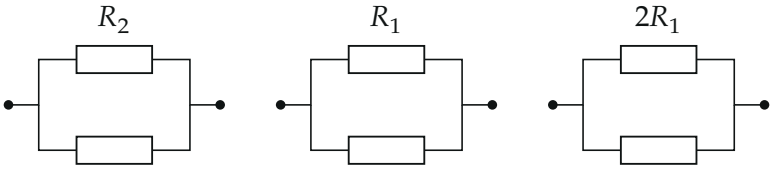
2. Перебор пар. Пар всего шесть, но разных сопротивлений три (рисунок 3):

- CB: ветви R_2 и $3R_1$, $\quad R_{CB} = \dfrac{3R_1R_2}{S}$;
- AC, AD, BD: ветви R_1 и $2R_1 + R_2$, $\quad R_{BD} = \dfrac{R_1(2R_1 + R_2)}{S}$;
- AB, CD: ветви $2R_1$ и $R_1 + R_2$, $\quad R_{AB} = \dfrac{2R_1(R_1 + R_2)}{S}$.

Мощность $P = \dfrac{U^2}{R}$, поэтому

$$P_{CB} = U^2\,\frac{S}{3R_1R_2}, \qquad P_{BD} = U^2\,\frac{S}{R_1(2R_1+R_2)},$$

$$P_{AB} = U^2\,\frac{S}{2R_1(R_1+R_2)}.$$



Три разных случая: кольцо всегда превращается в две параллельные ветви.

3. Какие мощности наибольшие. Сравним сопротивления (общий множитель $1/S$ отбросим):

$$\frac{R_{BD}}{R_{CB}} = \frac{2R_1+R_2}{3R_2} > 1 \ \text{(так как } R_1 > R_2\text{)}, \qquad \frac{R_{AB}}{R_{BD}} = \frac{2R_1+2R_2}{2R_1+R_2} > 1.$$

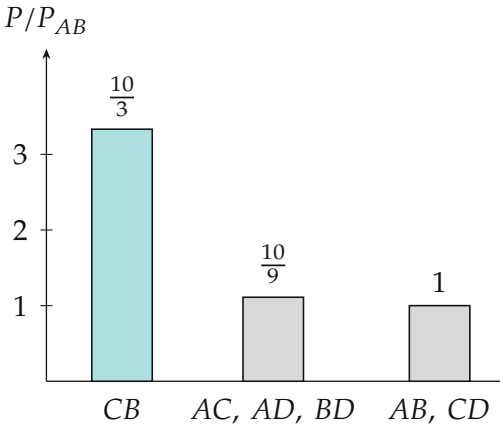
Значит, $R_{CB} < R_{BD} < R_{AB}$ и $P_{CB} > P_{BD} > P_{AB}$. Две наибольшие мощности — P_{CB} и P_{BD}, по условию одна втрое больше другой:

$$\frac{P_{CB}}{P_{BD}} = \frac{R_{BD}}{R_{CB}} = \frac{2R_1+R_2}{3R_2} = \frac{2n+1}{3} = 3 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{R_1}{R_2} = 4.$$

4. Наибольшая и наименьшая мощности.

$$\frac{P_{CB}}{P_{AB}} = \frac{R_{AB}}{R_{CB}} = \frac{2R_1(R_1+R_2)}{3R_1R_2} = \frac{2(n+1)}{3} = \frac{10}{3} \approx 3{,}3.$$

При $R_2 = 1$, $R_1 = 4$ (рисунок 4): $P_{CB} : P_{BD} : P_{AB} = \frac{13}{12} : \frac{13}{36} : \frac{13}{40} = \frac{10}{3} : \frac{10}{9} : 1$.



Мощности трёх видов подключения при $R_1 = 4R_2$ в долях наименьшей.

Обратите внимание. Одинаковых пар больше, чем кажется: AC, AD и BD дают одно и то же, потому что в каждом случае одна ветвь — один резистор R_1, а другая содержит всё остальное. Поэтому разных мощностей ровно три, как в условии.

Проверка. Размерность: $\frac{R_1R_2}{S}$ — омы. Предел $R_1 = R_2$: все три сопротивления сравниваются ($\frac{3}{4}R$ у CB и BD, R у AB) — кольцо из одинаковых резисторов, верно. Численно (python): при $R_1 = 4$, $R_2 = 1$ сопротивления $\frac{12}{13}$, $\frac{36}{13}$, $\frac{40}{13}$ Ом, отношения мощностей 3 и $\frac{10}{3}$.

Смысл: наибольшая мощность — когда источник подключён к концам самого маленького резистора R_2, он почти «закорачивает» цепь.

Ответ. $\dfrac{R_1}{R_2} = 4$; наибольшая мощность больше наименьшей в $\dfrac{P_{CB}}{P_{AB}} = \dfrac{10}{3} \approx 3{,}3$ раза.