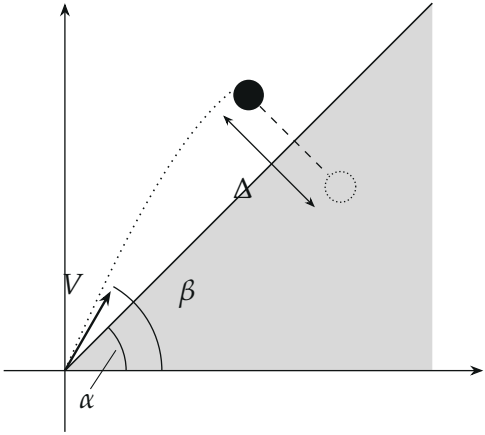
Зеркальная наклонная плоскость и снаряд

Задача 5. [Курчатов 2023/24, 9 класс, задача 5] Зеркальная наклонная плоскость расположена под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. В начальный момент времени из некоторой точки на наклонной плоскости выпускают снаряд со скоростью $v = 3$ м/с под углом $\beta = 60°$ к горизонту, как показано на рисунке. Найдите момент времени, когда расстояние между снарядом и его изображением в зеркале будет максимальным. Ответ выразите в секундах и округлите до сотых.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача о движении тела, брошенного под углом к горизонту, вместе с отражением в плоском зеркале. Изображение точки в плоском зеркале симметрично ей относительно зеркала, поэтому расстояние между снарядом и изображением равно удвоенному расстоянию от снаряда до зеркала. Главная идея: направить одну ось перпендикулярно зеркалу. Вдоль неё снаряд движется как тело, брошенное вверх: равнозамедленно, пока не остановится. В момент остановки он дальше всего от зеркала.

Обозначения. Ось n — перпендикулярно зеркалу от него, ось τ — вдоль зеркала вверх; $d(t)$ — расстояние от снаряда до зеркала, $\Delta = 2d$ — расстояние до изображения; v_n, g_n — проекции скорости и ускорения свободного падения на ось n; $g = 10\,\text{м/с}^2$ (в условии не дано, принимаем стандартное).

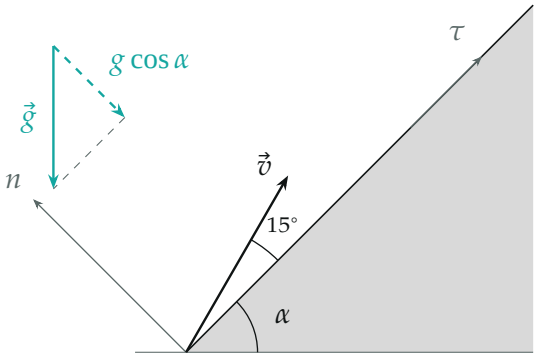
1. Расстояние до изображения. Изображение S^* точки S в плоском зеркале лежит на перпендикуляре к зеркалу на таком же расстоянии по другую сторону. Поэтому

$$\Delta(t) = 2\,d(t),$$

и Δ максимально тогда же, когда максимально d.

2. Проекции на ось n. Скорость направлена под углом β к горизонту, зеркало — под углом α, значит, угол между скоростью и зеркалом равен $\beta - \alpha = 15^\circ$ (рисунок 2). Ускорение $\vec{g}$ направлено вертикально вниз, а ось n отклонена от вертикали на угол α, поэтому проекция $\vec{g}$ на n отрицательна:

$$v_n = v\sin(\beta - \alpha), \qquad g_n = -g\cos\alpha.$$



Оси вдоль зеркала (τ) и перпендикулярно ему (n). Скорость отклонена от зеркала на 15°; составляющая $\vec{g}$ поперёк зеркала равна $g\cos\alpha$ и направлена к зеркалу.

3. Движение поперёк зеркала. Вдоль оси n ускорение постоянно, поэтому координата по закону равноускоренного движения

$$d(t) = v\sin(\beta - \alpha)\,t - \frac{g\cos\alpha\,t^2}{2}.$$

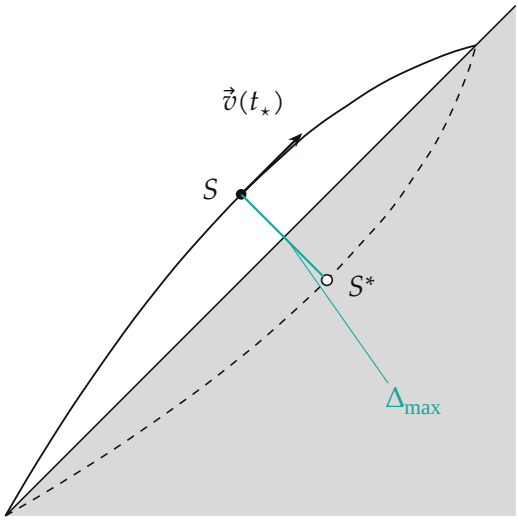
Расстояние растёт, пока проекция скорости $v_n(t) = v\sin(\beta-\alpha) - g\cos\alpha\,t$ положительна, и максимально, когда она обращается в ноль — снаряд

летит параллельно зеркалу (рисунок 3):

$$t_\star = \frac{v\sin(\beta-\alpha)}{g\cos\alpha} = \frac{3\cdot\sin 15^\circ}{10\cdot\cos 45^\circ} = \frac{3\cdot 0{,}2588}{7{,}071} \approx 0{,}110\text{ с}.$$

Снаряд упадёт на зеркало через $2t_\star \approx 0{,}22$ с, так что максимум наступает в полёте. Само наибольшее расстояние

$$\Delta_{\max} = 2\cdot\frac{v_n^2}{2g\cos\alpha} = \frac{(3\cdot 0{,}2588)^2}{7{,}071} \approx 0{,}085\text{ м}.$$



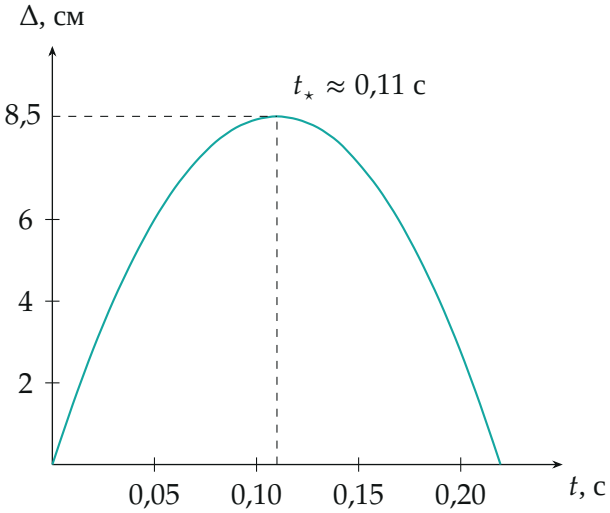
Траектория снаряда (сплошная) и его изображения (штриховая) в масштабе. В момент $t_\star$ скорость параллельна зеркалу, отрезок SS^* самый длинный.

4. Второй способ — в осях x, y. Зеркало — прямая $y = x$, расстояние от точки (x, y) до неё $\frac{y-x}{\sqrt{2}}$, поэтому $\Delta = \sqrt{2}\,(y-x)$. С $x = v\cos\beta\,t$, $y = v\sin\beta\,t - \frac{gt^2}{2}$:

$$\Delta(t) = \sqrt{2}\Big(v(\sin\beta-\cos\beta)\,t - \frac{gt^2}{2}\Big),$$

$$t_\star = \frac{v(\sin\beta - \cos\beta)}{g} = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{20} \approx 0{,}110 \text{ с}.$$

Совпадает: $\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha} = \sqrt{2}\sin(\beta - 45°) = \sin\beta - \cos\beta$. Это парабола с вершиной в $t_\star$ (рисунок 4).



Расстояние между снарядом и изображением по формуле шага 3 (python, $g = 10$ м/с^2).

Обратите внимание. Максимум расстояния до изображения — не в верхней точке траектории (там $v_y = 0$, это $t = 0{,}26$ с, уже после падения), а когда скорость параллельна зеркалу: важна высота «над зеркалом», а не над горизонтом. При $g = 9{,}8$ м/с^2 получается 0,112 с — после округления те же 0,11 с.

Проверка. Размерность: $\frac{\text{м/с}}{\text{м/с}^2} = \text{с}$. Предел: при $\beta = \alpha$ снаряд летит вдоль зеркала, $t_\star = 0$ — он сразу прижимается к зеркалу, так и должно быть. Численно (python): максимум $\sqrt{2}(y - x)$ по сетке времени — при $t = 0{,}1098$ с.

Смысл: поперёк зеркала снаряд — просто тело, брошенное «вверх» со скоростью $v\sin 15°$ при «тяжести» $g\cos 45°$; самое дальнее положение — в его «верхней точке».

Ответ. $t_\star = \dfrac{v\sin(\beta-\alpha)}{g\cos\alpha} = \dfrac{3(\sqrt{3}-1)}{20}$ с $\approx 0{,}11$ с.