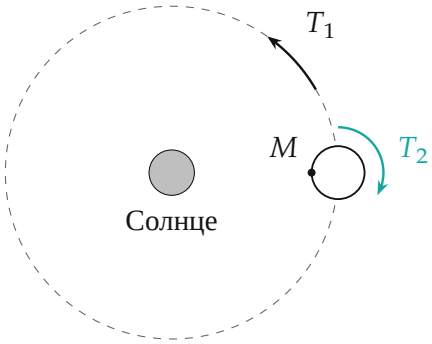
Солнечные сутки на планете

Задача 1. [Курчатов 2024/25, 10 класс, задача 1] Вокруг некоторой звезды, которую для удобства будем называть Солнцем, по круговой орбите движется планета. Период обращения равен $T_1 = 230$ земных суток. Планета также вращается вокруг собственной оси, перпендикулярной плоскости орбиты. Период осевого вращения относительно далёких звёзд равен $T_2 = 300$ земных суток; направления орбитального и осевого вращений противоположны. Найдите следующие величины:

1. Продолжительность T солнечных суток на планете (время между двумя последовательными полуднями). Числовой ответ выразите в земных сутках и округлите до целого значения.
2. Количества оборотов N_1 и N_2, которые планета совершает за время T при орбитальном и осевом вращениях. Числовые значения округлите до сотых.

Подсказка из условия: для наблюдателя на экваторе планеты в полдень Солнце находится в зените.



Поясняющий рисунок: планета обходит Солнце против часовой стрелки, а сама вращается по часовой; M — наблюдатель на экваторе в полдень.

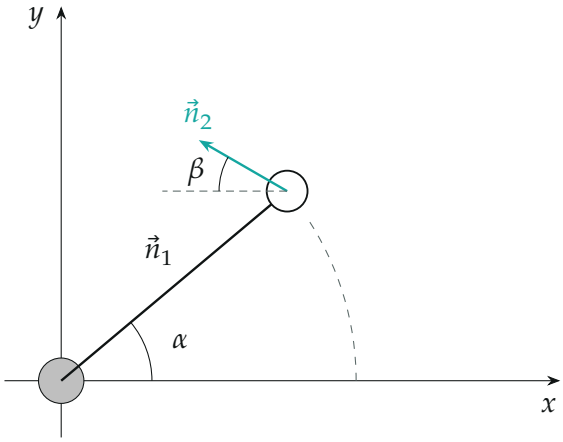
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на сложение вращений (кинематика). Полдень наступает, когда наблюдатель стоит точно между центром планеты и Солнцем. За сутки поворачиваются два направления: «Солнце → планета» (орбитальное движение) и «центр планеты →

наблюдатель» (осевое вращение). Вращения противоположны, поэтому углы поворота складываются, и сутки короче обоих периодов.

Обозначения. $\vec{n}_1$ — единичный вектор от центра Солнца к центру планеты; $\vec{n}_2$ — единичный вектор от центра планеты к наблюдателю, жёстко связанный с планетой; $\omega_1 = 2\pi/T_1$, $\omega_2 = 2\pi/T_2$ — угловые скорости относительно далёких звёзд; $\alpha = \omega_1 t$, $\beta = \omega_2 t$ — углы поворота векторов за время t. Ось x — вдоль $\vec{n}_1$ в момент полудня $t = 0$, ось y — в сторону орбитального движения.

1. Векторы в момент t. Вектор $\vec{n}_1$ поворачивается против часовой стрелки на угол α, вектор $\vec{n}_2$ (в начале $(-1;0)$) — по часовой на угол β:

$$\vec{n}_1 = (\cos\alpha;\ \sin\alpha), \qquad \vec{n}_2 = (-\cos\beta;\ \sin\beta).$$



Через время t: $\vec{n}_1$ повернулся на α против часовой стрелки, $\vec{n}_2$ — на β по часовой от направления $-x$ (пунктир).

2. Условие полудня. Солнце в зените, когда наблюдатель смотрит прямо на Солнце: $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1$, то есть скалярное произведение $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -1$:

$$-\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = -1,$$

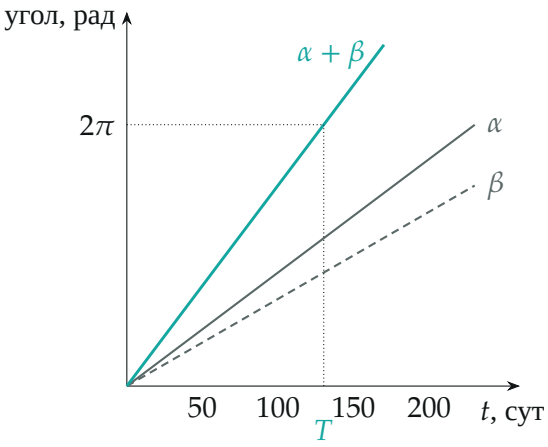
$$\cos(\alpha+\beta) = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 2\pi n.$$

3. Пункт 1. Подставляем $\alpha = 2\pi t/T_1$, $\beta = 2\pi t/T_2$:

$$t\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right) = n \quad \Rightarrow \quad t = \frac{T_1 T_2}{T_1+T_2}\,n.$$

Солнечные сутки — промежуток между соседними полуднями, $n = 1$:

$$T = \frac{T_1 T_2}{T_1+T_2} = \frac{230\cdot 300}{530} \approx 130{,}2 \approx 130 \text{ суток}.$$



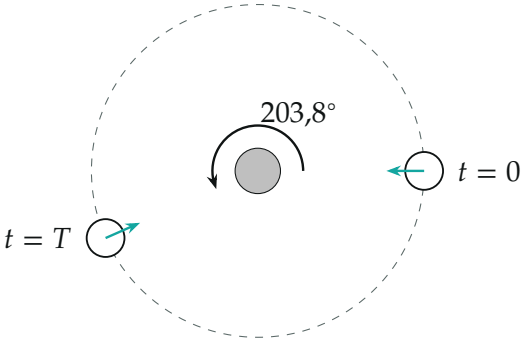
Углы поворота α и β растут линейно; полдень повторяется, когда их сумма достигает 2π.

4. Пункт 2. Числа оборотов за время T:

$$N_1 = \frac{T}{T_1} = \frac{T_2}{T_1+T_2} = \frac{300}{530} \approx 0{,}57,$$

$$N_2 = \frac{T}{T_2} = \frac{T_1}{T_1+T_2} = \frac{230}{530} \approx 0{,}43.$$

Их сумма равна единице — это то же условие $\alpha + \beta = 2\pi$, записанное в оборотах.



За солнечные сутки планета проходит по орбите 0,57 *оборота (*203,8°*), а вокруг оси поворачивается на* 0,43 *оборота в обратную сторону (*156,2°*); в сумме — полный оборот, наблюдатель (стрелка) снова смотрит на Солнце.*

Обратите внимание. При одинаковом направлении вращений углы вычитались бы: $T = \dfrac{T_1 T_2}{|T_1 - T_2|}$ (у Земли вращения сонаправлены, поэтому её солнечные сутки длиннее звёздных).

Проверка. Размерность: $T_1 T_2/(T_1 + T_2)$ — время. Предел $T_2 \to \infty$ (планета не вращается относительно звёзд): $T = T_1$ — Солнце обходит небо только из-за орбитального движения, верно. Предел $T_1 \to \infty$: $T = T_2$ — верно. $T < T_1$ и $T < T_2$ — так и должно быть при сложении вращений.

Смысл: относительно Солнца планета поворачивается с угловой скоростью $\omega_1 + \omega_2$, поэтому солнечные сутки — $2\pi/(\omega_1 + \omega_2)$.

Ответ. 1) $T = \dfrac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \approx 130$ суток; 2) $N_1 = \dfrac{T_2}{T_1 + T_2} \approx 0{,}57$, $N_2 = \dfrac{T_1}{T_1 + T_2} \approx 0{,}43$.