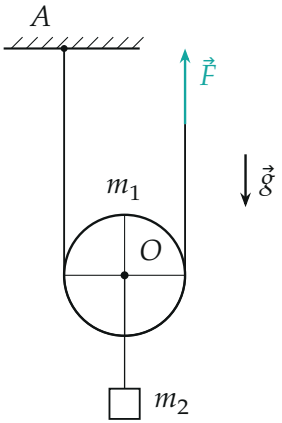
Обруч на нити с грузом

Задача 2. [Курчатов 2024/25, 10 класс, задача 2] Блок, представляющий собой тонкий обруч с невесомыми спицами, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр O. Масса обруча $m_1 = 0{,}1$ кг равномерно распределена по его длине. К оси блока подвешен груз массой $m_2 = 0{,}3$ кг. Нижняя половина блока охватывается невесомой и нерастяжимой нитью с вертикальными концевыми участками. Левый участок закреплён на потолке в точке A, а правый поднимают вверх, действуя на него постоянной силой $F = 2{,}1$ Н. Считая, что при движении нить не скользит по блоку, найдите следующие величины:

1. Ускорение центра блока a.
2. Отношение $x = \Delta T / F$, где $\Delta T = F - T$, T — сила натяжения левого участка нити. Числовое значение x округлите до сотых.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



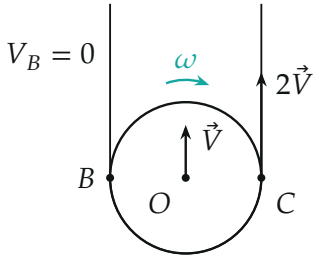
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача динамики твёрдого тела, класс — «катушка на нити». Левый конец нити неподвижен, нить не скользит, поэтому блок «катится» по левому участку вверх, как колесо по вертикальной стене. Правый конец нити при этом движется вдвое быстрее оси. Ускорение найдём из баланса энергии (работа силы F идёт на кинетическую и потенциальную энергию), а натяжение — из второго закона Ньютона.

Обозначения. V — скорость оси (вверх) и груза; ω — угловая скорость блока; r — его радиус; B и C — точки касания левого и правого участков (концы горизонтального диаметра).

1. Связь скоростей. Скорость точки обода — скорость оси плюс скорость вращения. Точка B касается неподвижного левого участка и не скользит по нему:

$$V_B = V - \omega r = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega r = V, \qquad V_C = V + \omega r = 2V.$$

Значит, правый конец нити (и точка приложения силы F) движется со скоростью $2V$ и ускорением $2a$.



Блок катится по неподвижному левому участку: B — мгновенная ось вращения, скорость точки C вдвое больше скорости центра.

2. Энергия системы. Кинетическая энергия обруча — энергия движения центра $m_1V^2/2$ плюс энергия вращения: все точки обруча относительно центра движутся со скоростью $\omega r = V$, это ещё $m_1V^2/2$. Итого m_1V^2. Груз движется со скоростью V. Полная механическая энергия

$$E = \left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)V^2 + m_1gh_1 + m_2gh_2,$$

h_1, h_2 — высоты оси и груза.

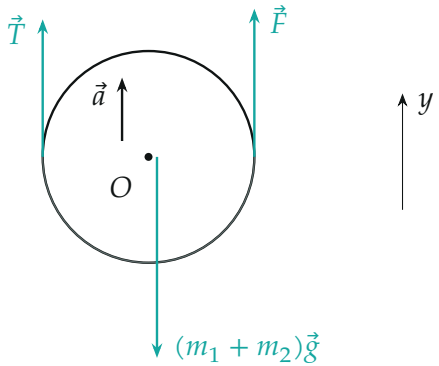
3. Пункт 1: баланс энергии за малое время Δt. Изменение энергии равно работе внешних сил. Сила F приложена к концу, движущемуся со скоростью $2V$, её работа $F \cdot 2V\Delta t$. Натяжение в точке A работы не совершает (A неподвижна); сила трения покоя нити о блок в сумме работы не совершает (нет проскальзывания). Учтём $\Delta(V^2) = 2V\Delta V = 2Va\Delta t$

и $\Delta h_1 = \Delta h_2 = V\Delta t$:

$$(2m_1 + m_2)Va\,\Delta t + (m_1 + m_2)gV\Delta t = 2FV\Delta t,$$

$$a = \frac{2F - (m_1 + m_2)g}{2m_1 + m_2} = \frac{4{,}2 - 4}{0{,}5} = 0{,}4 \text{ м/с}^2.$$

$a > 0$: ось с грузом разгоняется вверх.



Тело «блок + груз + нижняя часть нити»: внешние силы — натяжения вертикальных участков $\vec{T}$ и $\vec{F}$ и сила тяжести.

4. Пункт 2: второй закон Ньютона. Для системы «блок, груз, нижний участок нити» в проекции на ось y вверх (ускорение центра масс системы равно a):

$$(m_1 + m_2)a = T + F - (m_1 + m_2)g,$$

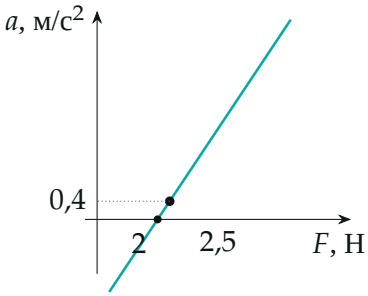
$$T = (m_1 + m_2)(g + a) - F = 4{,}16 - 2{,}1 = 2{,}06 \text{ Н}.$$

Подставим a: $F - T = 2F - (m_1 + m_2)(g + a)$, и с учётом $2F = (2m_1 + m_2)a + (m_1 + m_2)g$ получаем

$$\Delta T = F - T = m_1 a, \qquad x = \frac{\Delta T}{F} = \frac{m_1 a}{F} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}4}{2{,}1} \approx 0{,}02.$$

Проверка вторым способом. Уравнение моментов относительно оси O: разность натяжений раскручивает обруч, $(F - T)r = I\varepsilon$, где $I = m_1 r^2$

(вся масса на ободе) и угловое ускорение $\varepsilon = a/r$ (из $\omega r = V$). Получаем $F - T = m_1 a$ — совпало. Размерность a: $[F/m]$ — ускорение. Предел $m_1 \to 0$ (невесомый блок): $F = T$, $a = \dfrac{2F}{m_2} - g$ — обычный подвижный блок, на груз действует $2F$; верно.



Зависимость $a(F)$: прямая $a = (2F - 4)/0{,}5$; при $F < 2$ Н блок опускается, при $F = 2{,}1$ Н $a = 0{,}4$ м/с².

Обратите внимание. Работа силы F — на пути *конца нити*, а он проходит вдвое больше, чем ось. Отсюда «$2F$» в ответе.

Смысл: почти вся сила уходит на подъём, и лишь малая часть $m_1 a$ — на раскрутку обруча, поэтому натяжения отличаются всего на 2 %.

Ответ. 1) $a = \dfrac{2F - (m_1 + m_2)g}{2m_1 + m_2} = 0{,}4$ м/с²; 2) $x = \dfrac{m_1 a}{F} \approx 0{,}02$.