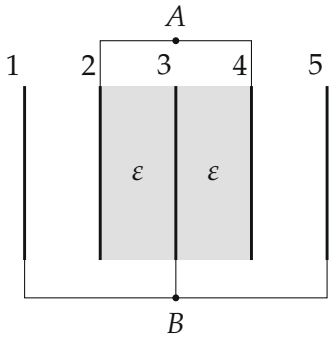
Пять пластин с диэлектриком

Задача 4. [Курчатов 2024/25, 10 класс, задача 4] Конденсатор состоит из пяти одинаковых тонких металлических пластин, расположенных параллельно друг другу на равных расстояниях. Пластины 2 и 4 соединены тонким проводом и образуют одну из обкладок конденсатора. Другая обкладка — пластины 1, 3 и 5, также соединённые проводом. Всё пространство между пластинами 2, 3 и 4 заполнено твёрдым однородным диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 4$. Конденсатор подключён к батарее за точки A и B. Найдите отношения q_1/q_2 и q_3/q_2, где q_1, q_2 и q_3 — заряды пластин 1, 2 и 3. Краевые эффекты не учитывайте.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача электростатики на систему пластин с диэлектриком. Пластины одной обкладки соединены проводом, значит, у них один потенциал. Поле между пластинами однородно и выражается через заряды по теореме Гаусса. Условие «разность потенциалов между пластинами одной обкладки равна нулю» даёт уравнения на заряды; конструкция симметрична относительно пластины 3.

Обозначения. S — площадь пластин, d — расстояние между соседними; $q_1, \ldots, q_5$ — заряды пластин; области между пластинами — I, II, III, IV; ось x — от пластины 1 к пластине 5; $E_{\mathrm{I}}, \ldots, E_{\mathrm{IV}}$ — проекции напряжённости на x; $U = \varphi_A - \varphi_B$.

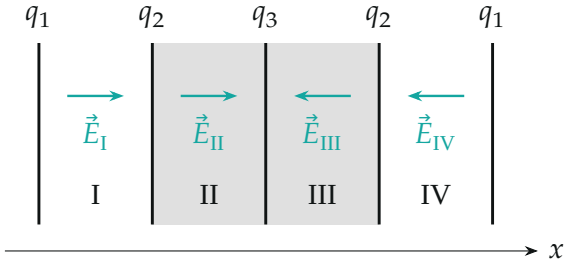
1. Заряды и симметрия. Система в целом нейтральна (батарея лишь переносит заряд с одной обкладки на другую), поэтому снаружи поля

нет. Пластины 1 и 5, 2 и 4 расположены симметрично относительно пластины 3, поэтому $q_1 = q_5$, $q_2 = q_4$, и

$$2q_1 + 2q_2 + q_3 = 0.$$

2. Поле в промежутках (теорема Гаусса). Возьмём замкнутую поверхность-«коробку»: левая грань — снаружи слева (там поля нет), правая — в промежутке. Поток вектора $\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ через неё равен заряду внутри:

$$E_{\mathrm{I}} = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S}, \qquad E_{\mathrm{II}} = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon\varepsilon_0 S}, \qquad E_{\mathrm{III}} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\varepsilon\varepsilon_0 S}, \qquad E_{\mathrm{IV}} = -\frac{q_5}{\varepsilon_0 S}.$$



Направления полей при $\varphi_A > \varphi_B$: от пластин обкладки A (2 и 4) к пластинам обкладки B. Серым — диэлектрик.

3. Условие равных потенциалов. Пластины 1 и 3 соединены проводом: $\varphi_1 - \varphi_3 = (E_{\mathrm{I}} + E_{\mathrm{II}})d = 0$:

$$q_1 + \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = -\frac{q_2}{\varepsilon + 1}.$$

(Для пластин 3 и 5 условие $E_{\mathrm{III}} + E_{\mathrm{IV}} = 0$ даёт то же самое — симметрия.)

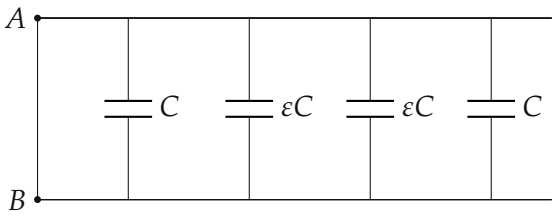
4. Ответ. Из суммы зарядов $q_3 = -2q_1 - 2q_2 = -2q_2\left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon + 1}\right)$:

$$\frac{q_1}{q_2} = -\frac{1}{\varepsilon + 1} = -0{,}2, \qquad \frac{q_3}{q_2} = -\frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1} = -1{,}6.$$

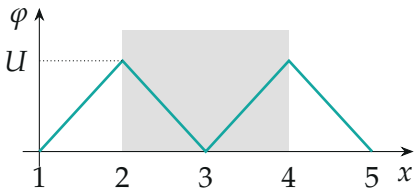
5. Проверка вторым способом — эквивалентная схема. Каждый промежуток — плоский конденсатор между пластиной обкладки A и пластиной обкладки B, то есть все четыре конденсатора подключены к одному напряжению U — параллельно. Ёмкости: $C = \varepsilon_0 S/d$ для I и IV, εC для II и III. Заряд пластины — сумма зарядов её обкладок в соседних конденсаторах:

$$q_1 = -CU, \qquad q_2 = CU + \varepsilon CU, \qquad q_3 = -2\varepsilon CU,$$

откуда те же $-\dfrac{1}{\varepsilon+1}$ и $-\dfrac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}$. Отсюда же видно: напряжённость во всех промежутках одинакова по модулю, U/d — а заряды на гранях в диэлектрике в ε раз больше.



Эквивалентная схема: промежутки I–IV — четыре конденсатора, включённые параллельно между A и B.



Потенциал между пластинами (обкладка B заземлена): во всех промежутках одинаковый наклон — одинаковое поле U/d.

Обратите внимание. Пластина 2 отдаёт заряд сразу в два промежутка, а крайняя пластина 1 — только в один (с внешней стороны поля нет). Поэтому заряды пластин одной обкладки различны.

Проверка размерности не нужна — отношения зарядов безразмерны; предел $\varepsilon = 1$: $q_1 : q_2 : q_3 = -\frac{1}{2} : 1 : -1$, как у пяти пластин в вакууме.

Ответ. $\dfrac{q_1}{q_2} = -\dfrac{1}{\varepsilon + 1} = -0{,}2$; $\dfrac{q_3}{q_2} = -\dfrac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1} = -1{,}6$.