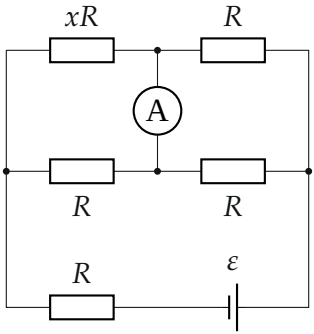
Мощность на переменном сопротивлении

Задача 5. [Курчатов 2024/25, 10 класс, задача 5] Электрическая цепь состоит из батареи с ЭДС $\varepsilon = 12$ В, идеального амперметра, четырёх одинаковых сопротивлений $R = 40$ Ом и переменного сопротивления xR. Пренебрегая внутренним сопротивлением батареи, найдите следующие величины:

1. Значение x, при котором тепловая мощность, выделяющаяся на сопротивлении xR, максимальна.
2. Максимальную тепловую мощность P_m, выделяющуюся на сопротивлении xR.
3. Силу тока I_A, текущего через амперметр при найденном значении x. Числовое значение силы тока выразите в миллиамперах.



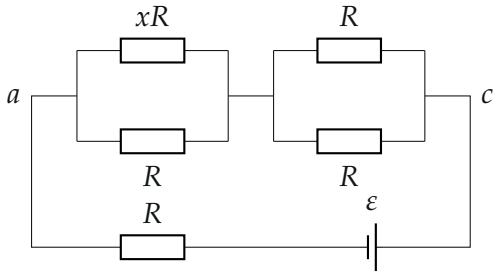
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на расчёт цепи постоянного тока и максимум мощности. Идеальный амперметр имеет нулевое сопротивление, поэтому его концы можно стянуть в одну точку: схема превращается в последовательное соединение R, параллельной пары $(xR,\ R)$ и параллельной пары $(R,\ R)$. Мощность на xR запишем как функцию x и найдём её максимум. Ток амперметра — из закона Кирхгофа для узла.

Обозначения. a и c — левый и правый узлы, b — узел между xR и верхним R, d — узел между нижними R; I — ток батареи; I_1, I_2 — токи на участках ab и ad; I_A — ток амперметра от b к d.

1. Эквивалентная схема. Точки b и d имеют один потенциал (на амперметре нет напряжения). Тогда xR и R между a и $b{=}d$ соединены па-

раллельно, как и два R между $b{=}d$ и c:

$$R_0 = R + \frac{xR\cdot R}{xR+R} + \frac{R}{2} = R\,\frac{5x+3}{2(x+1)}, \qquad I = \frac{\varepsilon}{R_0} = \frac{\varepsilon}{R}\cdot\frac{2(x+1)}{5x+3}.$$



Амперметр стянут в точку ($b{=}d$ — средний узел): $(xR \parallel R)$, $(R \parallel R)$ и R соединены последовательно с батареей.

2. Ток через xR. Узел a: $I_1 + I_2 = I$; напряжения на параллельных xR и R равны: $I_1 xR = I_2 R$, $I_2 = xI_1$. Отсюда

$$I_1 = \frac{I}{x+1} = \frac{2\varepsilon}{R(5x+3)}, \qquad P = I_1^2\,xR = \frac{4\varepsilon^2}{R}\cdot\frac{x}{(5x+3)^2}.$$

3. Пункт 1: максимум. Запишем

$$\frac{x}{(5x+3)^2} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5x+3} - \frac{3}{(5x+3)^2}\right)$$

и обозначим $y = \dfrac{1}{5x+3}$:

$$P = \frac{4\varepsilon^2}{5R}\,(y - 3y^2).$$

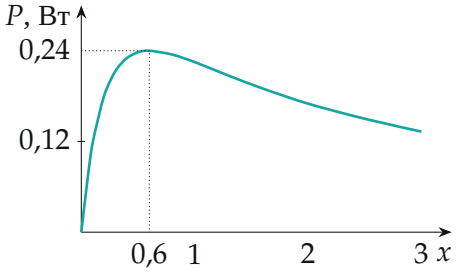
Парабола по y с ветвями вниз, вершина при $y = \dfrac{1}{6}$: $5x+3 = 6$,

$$x = \frac{3}{5}.$$

Второй способ — теорема об эквивалентном генераторе: всю цепь, кроме xR, можно заменить источником с внутренним сопротивлением r, а мощность на нагрузке максимальна при $xR = r$. Со стороны концов xR (точки a и $b{=}d$) видны два пути: нижний R и путь через батарею $R + R/2 = 1{,}5R$, соединённые параллельно: $r = \dfrac{R \cdot 1{,}5R}{2{,}5R} = 0{,}6R$. Значит, $x = 0{,}6$ — совпало.

4. Пункт 2.

$$P_m = \frac{4\varepsilon^2}{5R}\left(\frac{1}{6} - \frac{3}{36}\right) = \frac{\varepsilon^2}{15R} = \frac{144}{600} = 0{,}24\ \text{Вт}.$$

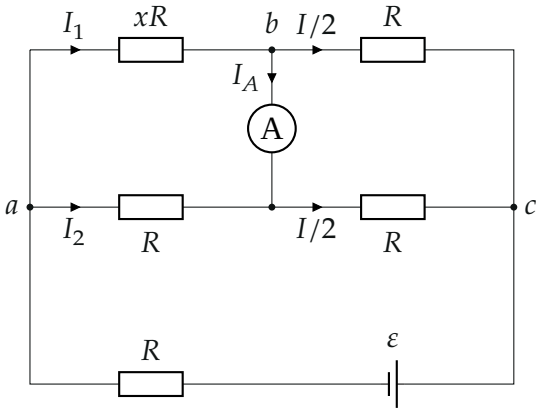


Мощность на xR в зависимости от x (точки по формуле $P(x)$): максимум 0,24 Вт при $x = 0{,}6$.

5. Пункт 3: ток амперметра. При $x = \frac{3}{5}$: $I = \dfrac{\varepsilon}{R} \cdot \dfrac{2 \cdot 1{,}6}{6} = \dfrac{8\varepsilon}{15R}$, $I_1 = \dfrac{I}{1{,}6} = \dfrac{\varepsilon}{3R}$. Справа от $b{=}d$ два одинаковых R с одним напряжением — через каждый (участки bc и dc) идёт $I/2$. Закон Кирхгофа для узла b: в него входит I_1, выходят $I/2$ (к c) и I_A (к d):

$$I_A = I_1 - \frac{I}{2} = \frac{\varepsilon}{3R} - \frac{4\varepsilon}{15R} = \frac{\varepsilon}{15R} = \frac{12}{600}\ \text{А} = 20\ \text{мА}.$$

$I_A > 0$: ток течёт через амперметр от b к d.



Токи при $x = 0{,}6$: $I_1 = 100$ мА, $I_2 = 60$ мА, по 80 мА через правые R, $I_A = 20$ мА.

Проверка. Числа: $I = \dfrac{8 \cdot 12}{600} = 160$ мА; $I_1 = 100$, $I_2 = 0{,}6 \cdot 100 = 60$ мА (сумма 160 — верно); справа по 80 мА; узел b: $100 = 80 + 20$ — верно. Мощность: $I_1^2 xR = 0{,}01 \cdot 24 = 0{,}24$ Вт — совпало. Размерность: ε^2/R — мощность, ε/R — ток.

Смысл: мощность на переменном резисторе максимальна, когда он равен внутреннему сопротивлению «остальной цепи», видимой с его концов ($0{,}6R$).

Ответ. 1) $x = \dfrac{3}{5}$; 2) $P_m = \dfrac{\varepsilon^2}{15R} = 0{,}24$ Вт; 3) $I_A = \dfrac{\varepsilon}{15R} = 20$ мА.