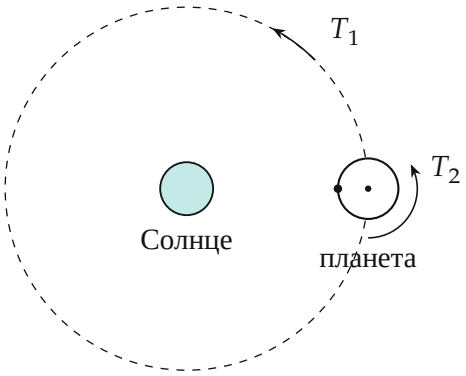
Солнечные сутки

Задача 1. [Курчатов 2024/25, 11 класс, задача 1] Вокруг некоторой звезды, которую для удобства будем называть Солнцем, по круговой орбите движется планета. Период обращения равен $T_1 = 110$ земных суток. Планета также вращается вокруг собственной оси, перпендикулярной плоскости орбиты. Период осевого вращения относительно далёких звёзд равен $T_2 = 80$ земных суток; направления орбитального и осевого вращений совпадают. Найдите следующие величины:

1. Продолжительность T солнечных суток на планете (время между двумя последовательными полуднями). Числовой ответ выразите в земных сутках и округлите до целого значения.
2. Количества оборотов N_1 и N_2, которые планета совершает за время T при орбитальном и осевом вращениях. Числовые значения округлите до десятых.

Подсказка: для наблюдателя на экваторе планеты в полдень Солнце находится в зените.



Поясняющий рисунок (вид со стороны северного полюса орбиты): планета обращается вокруг Солнца и вращается вокруг своей оси в ту же сторону. Точка на экваторе, обращённая к Солнцу, — наблюдатель в полдень.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на сложение вращений. Полдень — момент, когда наблюдатель на экваторе смотрит точно на Солнце. За то время, пока планета поворачивается вокруг оси, она ещё и

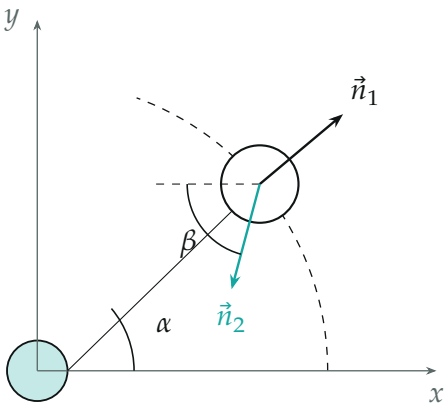
сдвигается по орбите, и направление на Солнце поворачивается вслед за ней. Поэтому следующий полдень наступает, когда осевое вращение «обгонит» орбитальное ровно на один оборот — как минутная стрелка догоняет часовую. Ключевой инструмент — два единичных вектора и условие их противоположности.

Обозначения. $\omega_1 = 2\pi/T_1$ и $\omega_2 = 2\pi/T_2$ — угловые скорости орбитального и осевого вращений относительно звёзд; $\vec{n}_1$ — единичный вектор от Солнца к планете; $\vec{n}_2$ — единичный вектор от центра планеты к наблюдателю на экваторе (он вращается вместе с планетой). Начало координат — в центре Солнца, $t = 0$ — момент полудня, ось x — вдоль $\vec{n}_1$ в этот момент, ось y — в сторону орбитального движения.

1. Векторы как функции времени. В полдень наблюдатель смотрит на Солнце, то есть $\vec{n}_2$ направлен противоположно $\vec{n}_1$. За время t вектор $\vec{n}_1$ повернётся на угол $\alpha = \omega_1 t$, а вектор $\vec{n}_2$, жёстко связанный с планетой, — на угол $\beta = \omega_2 t$ (оба против часовой стрелки, рисунок 2). Координаты:

$$\vec{n}_1 = (\cos\alpha;\ \sin\alpha), \qquad \vec{n}_2 = (-\cos\beta;\ -\sin\beta).$$

При $t = 0$ получаем $\vec{n}_1 = (1;0)$, $\vec{n}_2 = (-1;0)$ — полдень.



Положение через время t: $\vec{n}_1$ повернулся на угол $\alpha = \omega_1 t$ относительно оси x; $\vec{n}_2$ повернулся на угол $\beta = \omega_2 t$ относительно своего начального направления

(пунктир, $-x$). Полдень снова наступит, когда $\vec{n}_2$ станет противоположен $\vec{n}_1$.

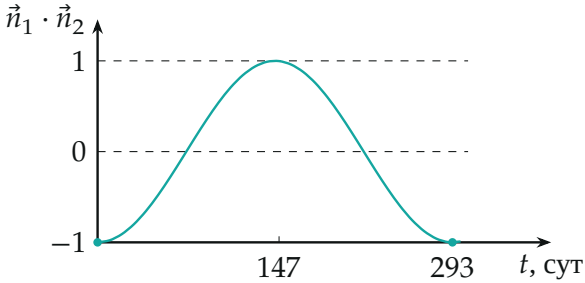
2. Условие полудня. Векторы противоположны, когда их скалярное произведение равно -1:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = -\cos(\alpha-\beta) = -1.$$

Отсюда $\cos(\alpha-\beta) = 1$, то есть $\alpha - \beta = 2\pi n$, n — целое:

$$t\left(\frac{2\pi}{T_1} - \frac{2\pi}{T_2}\right) = 2\pi n \quad \Rightarrow \quad t\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = n.$$

На рисунке 3 — скалярное произведение как функция времени: оно равно -1 в полдень $t = 0$ и снова только через T.



Скалярное произведение $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -\cos(2\pi t(1/T_1 - 1/T_2))$ по точкам. Полдень — значение -1: при $t = 0$ и $t = T \approx 293$ сут; в середине, при $t \approx 147$ сут, — полночь.

3. Пункт 1. Продолжительность солнечных суток. Солнечные сутки — наименьшее положительное t. Его даёт $n = \pm 1$: знак выбирается так, чтобы $t > 0$ (у нас $T_2 < T_1$, поэтому $n = -1$). Обе возможности объединяет модуль:

$$T = \frac{T_1 T_2}{|T_1 - T_2|} = \frac{110 \cdot 80}{30} \approx 293 \text{ сут}.$$

Обратите внимание: солнечные сутки здесь много длиннее звёздных (80 сут). Планета вращается вокруг оси лишь ненамного быстрее, чем

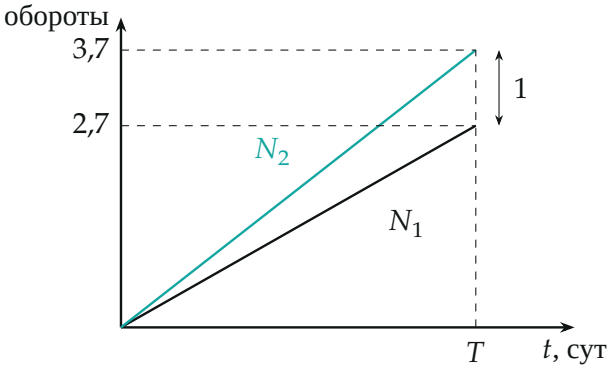
обходит Солнце, и осевое вращение «обгоняет» орбитальное на оборот медленно. Формула $1/T = 1/T_2 - 1/T_1$ верна только при одинаковом направлении вращений; при противоположных было бы $1/T = 1/T_2 + 1/T_1$.

4. Пункт 2. Числа оборотов. За время T векторы повернулись на $\alpha = \omega_1 T$ и $\beta = \omega_2 T$; число оборотов — угол, делённый на 2π:

$$N_1 = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{T}{T_1} = \frac{T_2}{|T_1 - T_2|} = \frac{80}{30} \approx 2{,}7,$$

$$N_2 = \frac{\beta}{2\pi} = \frac{T}{T_2} = \frac{T_1}{|T_1 - T_2|} = \frac{110}{30} \approx 3{,}7.$$

Разность $N_2 - N_1 = 1$: за солнечные сутки осевое вращение ровно на оборот опережает орбитальное. Это и есть второй, короткий способ: из $T/T_2 - T/T_1 = 1$ сразу следует ответ пункта 1. Рисунок 4 показывает это наглядно.



Числа оборотов растут линейно со временем; солнечные сутки кончаются, когда осевые обороты N_2 (бирюза) опережают орбитальные N_1 ровно на один.

Проверка. Размерность: произведение периодов, делённое на период, — сутки. Предел: при $T_1 \to \infty$ (планета не обращается) $T \to T_2$ — солнечные сутки равны звёздным. Для Земли $T_1 = 365{,}25$, $T_2 = 0{,}9973$ сут — формула даёт 1,000 сут, как и должно быть. При $T_1 = T_2$

(планета всегда повёрнута к Солнцу одной стороной, как Луна к Земле) $T \to \infty$ — полдень никогда не меняется.

Смысл: солнечные сутки — время, за которое вращение вокруг оси набирает лишний оборот относительно движения по орбите.

Ответ. 1) $T = \dfrac{T_1 T_2}{|T_1 - T_2|} \approx 293$ сут; 2) $N_1 = \dfrac{T}{T_1} = \dfrac{T_2}{|T_1 - T_2|} \approx 2{,}7$, $N_2 = \dfrac{T}{T_2} = \dfrac{T_1}{|T_1 - T_2|} \approx 3{,}7$.