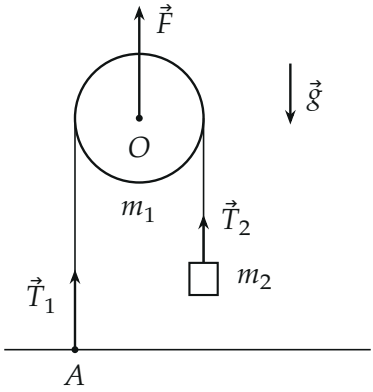
Обруч-блок с грузом

Задача 2. [Курчатов 2024/25, 11 класс, задача 2] Блок, представляющий собой тонкий обруч с невесомыми спицами, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр O. Масса обруча $m_1 = 50$ г равномерно распределена по его длине. Через блок переброшена невесомая и нерастяжимая нить, к правому концу которой подвешен груз массой $m_2 = 75$ г. Левый вертикальный участок нити закреплён на полу в точке A. Ось блока поднимают вверх, действуя на неё постоянной силой $F = 2{,}2$ Н. Считая, что при движении нить не скользит по блоку, найдите следующие величины:

1. Ускорения оси блока a_1 и груза a_2.
2. Отношение $x = \Delta T / T_1$, где $\Delta T = T_1 - T_2$, T_1 и T_2 — силы натяжения левого и правого вертикальных участков нити. Числовое значение x округлите до сотых.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



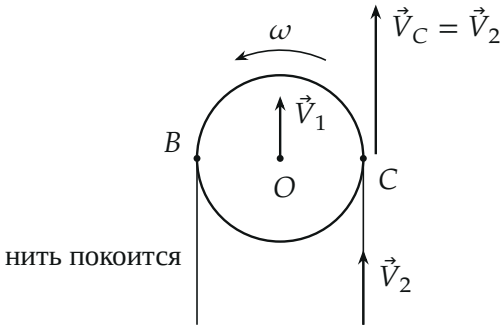
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на динамику блока, катящегося по нити. Левый участок нити закреплён на полу и неподвижен, поэтому обруч «катится» вверх по нему без проскальзывания, как колесо по дороге. Отсюда кинематическая связь: груз поднимается вдвое быстрее оси. План (как у организаторов): связь скоростей → кинетическая энергия обруча → баланс энергии с работой силы F даёт a_1; затем второй

закон Ньютона для блока и для груза даёт натяжения. Второй способ — уравнение вращения обруча.

Обозначения. r — радиус обруча; V_1 и V_2 — скорости оси и груза (вверх), ω — угловая скорость обруча; B и C — концы горизонтального диаметра, где обруч касается левого и правого участков нити; h_1, h_2 — высоты оси и груза над полом. Ось y — вертикально вверх.

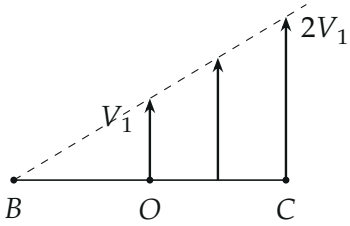
1. Связь скоростей. Скорость точки обруча — скорость оси плюс скорость вращения вокруг оси (закон сложения скоростей). Обруч вращается против часовой стрелки (рисунок 2): точка B относительно оси движется вниз со скоростью ωr, точка C — вверх. Нить не скользит, значит, скорость точки обруча равна скорости участка нити, которого она касается: левый участок неподвижен, правый движется вместе с грузом:

$$\begin{cases} V_B = V_1 - \omega r = 0, \\ V_C = V_1 + \omega r = V_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \omega r = V_1, \quad V_2 = 2V_1, \quad a_2 = 2a_1.$$



Кинематика: точка B касается неподвижного участка нити, её скорость равна нулю; точка C движется вместе с правым участком нити и грузом.

Распределение скоростей вдоль диаметра BC — как при вращении вокруг точки B: скорость растёт линейно от нуля в B до V_1 в центре и $2V_1$ в C (рисунок 3).



Скорости точек горизонтального диаметра: обруч в данный момент поворачивается вокруг точки B, концы векторов лежат на одной прямой.

2. Энергия системы. Система — обруч, нить и груз. Кинетическая энергия обруча — энергия движения его центра плюс энергия вращения; вся масса обруча на расстоянии r от оси, поэтому скорость каждой его точки относительно оси равна $\omega r = V_1$:

$$E_{к1} = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_1 (\omega r)^2}{2} = m_1 V_1^2.$$

Полная механическая энергия (нить невесома):

$$E = m_1 V_1^2 + \frac{m_2 V_2^2}{2} + m_1 g h_1 + m_2 g h_2 = (m_1 + 2m_2) V_1^2 + m_1 g h_1 + m_2 g h_2.$$

3. Баланс энергии за малое время Δt. Приращение энергии равно работе внешних сил. Работу совершает только сила F: точка её приложения (ось) смещается на $V_1 \Delta t$. Сила, с которой пол держит нить в точке A, работы не совершает — точка A неподвижна. Силы трения покоя между нитью и обручем в сумме работы не совершают: проскальзывания нет, тепло не выделяется.

$$\Delta E = F V_1 \Delta t.$$

При малом Δt: $\Delta(V_1^2) = 2V_1 \Delta V_1 = 2V_1 a_1 \Delta t$, $\Delta h_1 = V_1 \Delta t$, $\Delta h_2 = 2V_1 \Delta t$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta E &= (m_1 + 2m_2) \cdot 2V_1 a_1 \Delta t + m_1 g V_1 \Delta t + 2m_2 g V_1 \Delta t = \\ &= (m_1 + 2m_2)(2a_1 + g) V_1 \Delta t. \end{aligned}$$

Приравниваем и сокращаем $V_1\Delta t$:

$$(m_1+2m_2)(2a_1+g)=F \quad\Rightarrow\quad a_1=\frac{F}{2(m_1+2m_2)}-\frac{g}{2},$$

$$a_1=\frac{2{,}2}{2\cdot 0{,}2}-5=0{,}5\ \text{м/с}^2, \qquad a_2=2a_1=1\ \text{м/с}^2.$$

Оба ускорения положительны: ось и груз ускоряются вверх. Это возможно, только если $F>(m_1+2m_2)g=2$ Н — у нас 2,2 Н.

4. Натяжения нити. Тело — обруч вместе с верхним участком нити (рисунок 4). Внешние силы: $\vec{F}$ вверх, $m_1\vec{g}$ вниз и силы натяжения вертикальных участков нити, обе вниз. Второй закон Ньютона в проекции на ось y:

$$m_1a_1=F-m_1g-T_1-T_2.$$

Для груза:

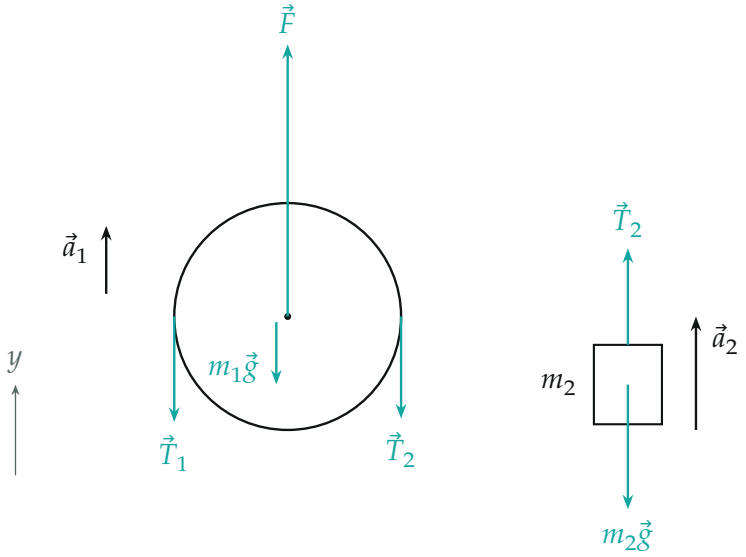
$$m_2a_2=T_2-m_2g \quad\Rightarrow\quad T_2=m_2(g+2a_1)=0{,}075\cdot 11=0{,}825\ \text{Н}.$$

Тогда

$$T_1=F-m_1g-m_1a_1-T_2=2{,}2-0{,}5-0{,}025-0{,}825=0{,}85\ \text{Н}.$$

В общем виде, после подстановки a_1:

$$T_1=\frac{F-m_1g}{2}, \qquad T_2=\frac{Fm_2}{m_1+2m_2}.$$



Силы на обруч с верхним участком нити (слева) и на груз (справа). Длины стрелок примерно по модулю: $F = 2{,}2$ Н, $T_1 = 0{,}85$ Н, $T_2 = 0{,}825$ Н, $m_1 g = 0{,}5$ Н, $m_2 g = 0{,}75$ Н.

5. Пункт 2. Отношение x.

$$\Delta T = T_1 - T_2 = m_1 a_1 = 0{,}025 \text{ Н},$$

$$x = \frac{\Delta T}{T_1} = \frac{2m_1 a_1}{F - m_1 g} = \frac{0{,}025}{0{,}85} \approx 0{,}03.$$

6. Второй способ — вращение обруча. Уравнение динамики вращения обруча вокруг его оси: момент инерции $m_1 r^2$, угловое ускорение $\varepsilon = a_1/r$ (из связи $\omega r = V_1$). Против часовой стрелки поворачивает T_1 (тянет левый край вниз), по часовой — T_2:

$$m_1 r^2 \frac{a_1}{r} = (T_1 - T_2)\, r \quad \Rightarrow \quad T_1 - T_2 = m_1 a_1.$$

Подставим $T_1 = T_2 + m_1 a_1$ и $T_2 = m_2(g + 2a_1)$ в уравнение для обруча шага 4:

$$2m_1 a_1 + 2m_2(g + 2a_1) = F - m_1 g,$$

откуда снова

$$a_1 = \frac{F - (m_1 + 2m_2)g}{2(m_1 + 2m_2)} = 0{,}5 \text{ м/с}^2$$

— то же, что из энергии.

Обратите внимание: натяжения слева и справа различны, хотя блок «без трения на оси»: обруч имеет массу и разгоняется во вращении, а разность натяжений и создаёт нужный для этого момент. При невесомом блоке было бы $T_1 = T_2$.

Проверка. Размерность: Н/кг $=$ м/с^2, x безразмерно. Предел: при $m_1 \to 0$ получаем $\Delta T = 0$, $x = 0$ — невесомый блок натяжений не различает; тогда $a_1 = F/(4m_2) - g/2$, и уравнения невесомого подвижного блока $2T = F$, $T - m_2 g = 2m_2 a_1$ выполняются. Численно: $F - m_1 g - T_1 - T_2 = 2{,}2 - 0{,}5 - 1{,}675 = 0{,}025 = m_1 a_1$.

Смысл: обруч, катящийся по неподвижной нити, работает как подвижный блок — груз движется вдвое быстрее оси, а масса обруча делает натяжения по сторонам чуть разными.

Ответ. 1) $a_1 = \dfrac{F}{2(m_1 + 2m_2)} - \dfrac{g}{2} = 0{,}5$ м/с^2, $a_2 = 2a_1 = 1$ м/с^2; 2) $x = \dfrac{2m_1 a_1}{F - m_1 g} \approx 0{,}03$.