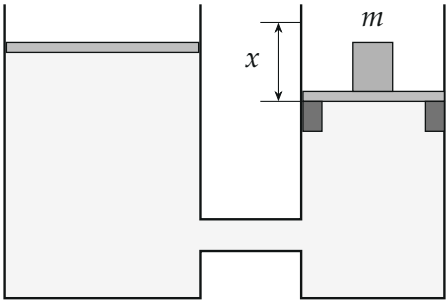
Пневматический пресс

Задача 3. [Курчатов 2024/25, 11 класс, задача 3] Правое колено пневматического пресса диаметром $d = 5{,}0$ см перекрыто лёгким плотно пригнанным поршнем, лежащим на упорах. На поршень положили груз массой $m = 5{,}0$ кг. После этого левое колено закрывали лёгким поршнем, так, что давление воздуха в цилиндрах осталось равным нормальному атмосферному давлению $p_0 = 100$ кПа, а его объём равным $V_0 = 22$ л. Какую минимальную работу $A_{\min}$ необходимо совершить, чтобы, двигая левый поршень, поднять груз в правом колене на высоту $x = 10{,}0$ см?

Утечкой газа, трением поршней о стенки цилиндров и теплоёмкостью пресса можно пренебречь. Считать, что воздух в прессе теплоизолирован. Уравнение адиабатного процесса для воздуха имеет вид $PV^{7/5} = \text{const}$.



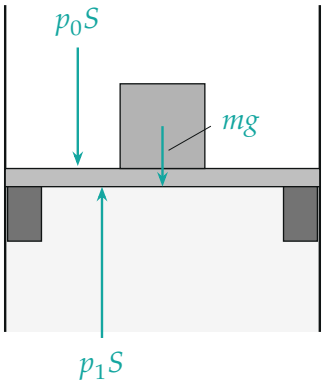
▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на первый закон термодинамики для адиабатного процесса с поршнями. Сначала груз лежит на упорах, и мы просто сжимаем воздух: давление растёт по адиабате, пока не станет достаточным, чтобы поднять поршень с грузом. Дальше давление больше не растёт: мы вдвигаем левый поршень, правый с грузом поднимается, состояние газа не меняется. Минимальная работа — при медленном (квазистатическом) движении, когда сила, с которой мы давим на поршень, лишь уравновешивает разность давлений. Главная идея: на левый поршень снаружи давит ещё и атмосфера, и большую часть работы по сжатию газа совершает она.

Обозначения. $S = \pi d^2/4$ — площадь правого поршня; $S_л$ — площадь левого (она не понадобится); p_1, V_1 — давление и объём газа в момент, когда груз начинает подниматься; $\gamma = 7/5$; ν — количество воздуха. Воздух — идеальный двухатомный газ: $U = \frac{5}{2}\nu RT = \frac{5}{2}pV$ (именно такому газу соответствует $\gamma = 7/5$). Ускорение свободного падения в условии не дано, берём $g = 9{,}8$ м/с^2.

1. Давление подъёма. Правый поршень лёгкий; сверху на него давят атмосфера и груз, снизу — газ (рисунок 2). Поршень оторвётся от упоров, когда сила давления газа уравновесит остальные силы. Условие равновесия поршня в проекции на вертикаль:

$$p_1 S = p_0 S + mg \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_0 + \frac{4mg}{\pi d^2},$$

$$p_1 = 100\text{ кПа} + \frac{4 \cdot 5 \cdot 9{,}8}{\pi \cdot 0{,}05^2}\text{ Па} \approx 125{,}0\text{ кПа}.$$



Силы на правый поршень с грузом в момент отрыва от упоров: давление газа снизу уравновешивает атмосферу и вес груза.

2. Первый этап: адиабатное сжатие. Пока $p < p_1$, правый поршень стоит, газ сжимается только левым поршнем. Теплообмена нет, процесс медленный, поэтому идёт по адиабате $pV^\gamma = \text{const}$:

$$V_1 = V_0 \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{1/\gamma} = 22 \cdot 1{,}2496^{-5/7} \approx 18{,}76\text{ л}.$$

Первый закон термодинамики для газа на этом этапе ($Q = 0$): работа внешних сил над газом равна приращению внутренней энергии,

$$A_{\text{газ}} = \Delta U = \frac{5}{2}(p_1V_1 - p_0V_0),$$

$$\Delta U = \frac{5}{2}p_0V_0\left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right] \approx 361 \text{ Дж}.$$

(Здесь $p_1V_1 = p_0V_0\,(p_1/p_0)^{1-1/\gamma}$ — следствие уравнения адиабаты.)

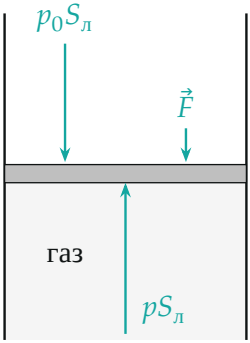
3. Кто совершает эту работу. Над газом работает левый поршень, а на него снаружи действуют две силы: наша F и сила атмосферного давления $p_0S_{\text{л}}$ (рисунок 3). Поршень лёгкий и движется медленно, поэтому

$$F + p_0S_{\text{л}} = pS_{\text{л}} \quad \Rightarrow \quad F = (p - p_0)S_{\text{л}}.$$

Значит, атмосфера совершает работу $p_0(V_0 - V_1)$, а мы — только остальное:

$$A_1 = \Delta U - p_0(V_0 - V_1) \approx 361{,}5 - 323{,}7 \approx 38 \text{ Дж}.$$

На диаграмме pV (рисунок 4) работа над газом — вся площадь под адиабатой, работа атмосферы — серый прямоугольник под уровнем p_0, наша — бирюзовая полоска между ними.

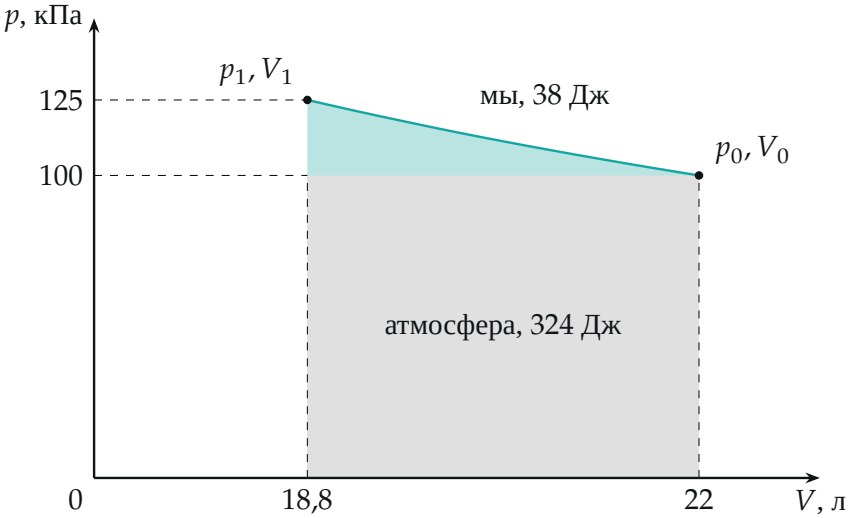


Силы на левый поршень: снизу давит газ, сверху — атмосфера и мы. При медленном движении $F = (p - p_0)S_{\text{л}}$.

4. Второй этап: подъём груза. Когда давление достигло p_1, поршень с грузом начинает подниматься. Чтобы поднимать его медленно, давление нужно держать равным p_1, тогда по уравнению адиабаты постоянны и объём V_1, и температура: сколько объёма мы вдвигаем слева, столько освобождается справа, $S_л\,\Delta l = Sx$. Внутренняя энергия газа не меняется. Наша работа:

$$A_2 = (p_1 - p_0)\,Sx = mgx = 5 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}1 = 4{,}9 \text{ Дж}.$$

Здесь атмосфера на левом поршне совершает работу $p_0 Sx$, а на правом — такую же отрицательную; их работы взаимно уничтожаются, и наша работа идёт на потенциальную энергию груза.



Первый этап на диаграмме pV (ось V начинается с 17 л, давления — от нуля). Работа над газом $\Delta U \approx 361$ Дж — вся площадь под адиабатой; серая часть — работа атмосферы $p_0(V_0 - V_1)$, бирюзовая — наша. На втором этапе состояние газа — точка (p_1, V_1).

5. Ответ. Минимальная работа — сумма двух этапов:

$$A_{\min} = \frac{5}{2} p_0 V_0 \left[\left(1 + \frac{4mg}{\pi d^2 p_0} \right)^{2/7} - 1 \right] - \\ - p_0 V_0 \left[1 - \left(1 + \frac{4mg}{\pi d^2 p_0} \right)^{-5/7} \right] + mgx \approx 43 \text{ Дж}.$$

Если бы снаружи был вакуум (а давление подъёма — то же p_1), атмосфера не помогала бы, и пришлось бы совершить всю работу над газом: $\Delta U + mgx \approx 366$ Дж. У организаторов в ответе ≈ 360 Дж: они приравнивают искомую работу работе над газом и не учитывают, что атмосфера давит на левый поршень так же, как на правый (а на правый — учитывают, когда находят p_1).

Обратите внимание: в одной задаче нельзя учитывать атмосферу у одного поршня и забывать у другого. Если атмосферное давление входит в условие отрыва правого поршня, оно действует и на левый.

Проверка. Размерность: Па·м^3 = Дж. Предел: при $m \to 0$ давление подъёма $p_1 \to p_0$, первый этап исчезает, и $A_{\min} \to mgx \to 0$ — как для невесомого поршня. Малое сжатие: при $\Delta p = p_1 - p_0 \ll p_0$ работа первого этапа приближённо

$$A_1 \approx \frac{(\Delta p)^2 V_0}{2\gamma p_0} = \frac{(25 \cdot 10^3)^2 \cdot 0{,}022}{2 \cdot 1{,}4 \cdot 10^5} \approx 49 \text{ Дж}$$

— того же порядка, что точные 38 Дж (разница — из-за того, что $\Delta p/p_0 = 0{,}25$ не очень мало). Численно (python): $\Delta U = 361{,}5$ Дж, $p_0 \Delta V = 323{,}7$ Дж, $mgx = 4{,}9$ Дж, сумма 42,7 Дж; с $g = 10$ м/с^2 — 44 Дж.

Смысл: сжимать воздух от атмосферного давления дёшево — атмосфера сама вдавливает поршень, а нам остаётся только «добавка» сверх неё; поэтому работа в десятки раз меньше изменения внутренней энергии газа.

Ответ. $A_{\min} = \frac{5}{2}(p_1 V_1 - p_0 V_0) - p_0(V_0 - V_1) + mgx \approx 43$ Дж, где $p_1 = p_0 + 4mg/(\pi d^2)$, $V_1 = V_0 (p_0/p_1)^{5/7}$.