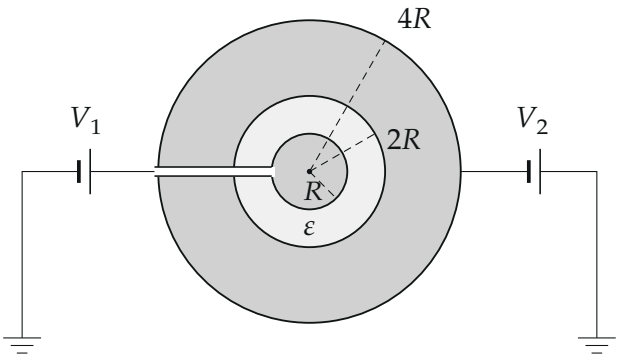
Шар в сферическом слое с диэлектриком

Задача 4. [Курчатов 2024/25, 11 класс, задача 4] Металлический шар радиуса R окружён металлическим сферическим слоем. Центры шара и слоя совпадают; внутренний радиус слоя равен $2R$, внешний — $4R$. Всё пространство между шаром и слоем заполнено твёрдым однородным диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 2{,}5$. Шар и слой заземляют через батареи с ЭДС $V_1 = 4{,}5$ В и $V_2 = 9$ В (провод, заземляющий шар, не касается слоя). Найдите следующие величины:

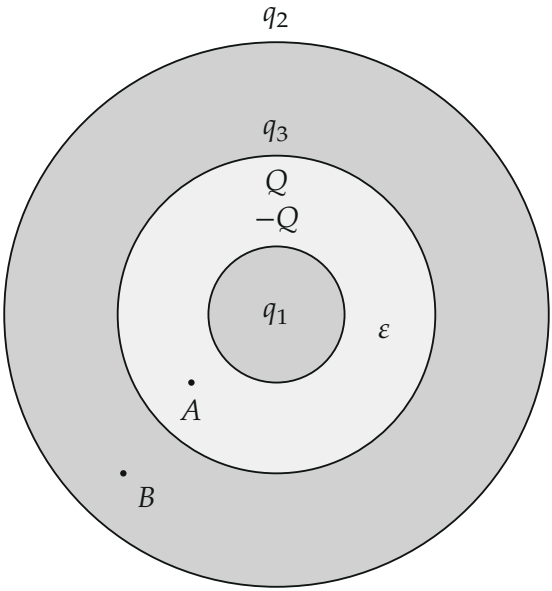
1. Отношение x_1 заряда Q, индуцированного на внешней границе диэлектрика, к заряду шара q_1: $x_1 = Q/q_1$.
2. Отношение x_2 заряда q_2 внешней поверхности металлического слоя к заряду шара q_1: $x_2 = q_2/q_1$.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача электростатики проводников с диэлектриком. Внутри металла поля нет, а в диэлектрике поле шара ослаблено в ε раз. Ослабление создают связанные (поляризационные) заряды на двух границах диэлектрика — их и спрашивают в пункте 1. Потенциалы шара и слоя заданы батареями: это два уравнения на два неизвестных заряда q_1 и q_2.

Обозначения. q_1 — заряд шара; q_3 и q_2 — заряды внутренней и внешней поверхностей слоя; $-Q$ и Q — связанные заряды на внутренней (радиус R) и внешней (радиус $2R$) границах диэлектрика (диэлектрик в

целом нейтрален); $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$; A — точка в диэлектрике на расстоянии r_A от центра, B — точка в толще слоя.



Заряды: шар q_1, границы диэлектрика $-Q$ и Q, поверхности слоя q_3 и q_2; A — в диэлектрике, B — в металле слоя.

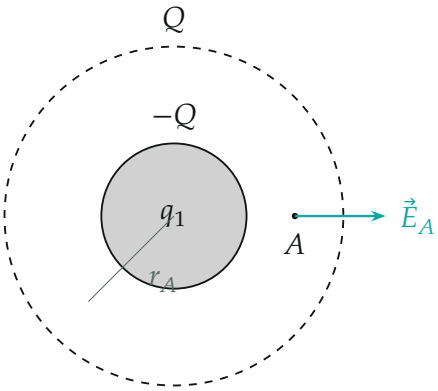
Пункт 1.

1. Поле в диэлектрике двумя способами. Поле сферически симметрично. В однородном диэлектрике, заполняющем всё пространство вокруг шара до проводника, поле заряда q_1 ослаблено в ε раз:

$$E_A = \frac{kq_1}{\varepsilon r_A^2}.$$

С другой стороны, диэлектрик можно убрать, оставив его связанные заряды — две сферы с зарядами $-Q$ (радиус R) и Q (радиус $2R$) в вакууме. По теореме Гаусса поле в точке A создают только заряды внутри сферы радиуса r_A: q_1 и $-Q$,

$$E_A = \frac{k(q_1 - Q)}{r_A^2}.$$



Диэлектрик заменён его связанными зарядами в вакууме; поле в точке A на расстоянии r_A от центра создают заряды внутри сферы этого радиуса: q_1 и $-Q$.

2. Связанный заряд. Приравниваем два выражения:

$$\frac{q_1}{\varepsilon} = q_1 - Q \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} q_1, \qquad x_1 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} = \frac{1{,}5}{2{,}5} = 0{,}6.$$

Знак Q совпадает со знаком q_1: у шара собираются концы диполей противоположного знака ($-Q$), у слоя — того же ($+Q$).

Пункт 2.

3. Заряд внутренней поверхности слоя. Внутри металла поле равно нулю. По теореме Гаусса для сферы, проходящей через точку B, суммарный заряд внутри неё равен нулю:

$$q_1 - Q + Q + q_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_3 = -q_1.$$

4. Потенциалы. Слой заземлён через батарею V_2, поэтому его потенциал $\varphi_2 = V_2$ (полярность — как на рисунке, плюс к слою); шар — $\varphi_1 = V_1$. Снаружи слоя поле создаёт весь заряд системы $q_1 - Q + Q + q_3 + q_2 = q_2$, поэтому

$$\varphi_2 = \frac{kq_2}{4R} = V_2.$$

Потенциал шара — потенциал слоя плюс работа поля в диэлектрике на

пути от R до $2R$:

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \frac{kq_1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right) = \frac{k}{2R}\left(\frac{q_1}{\varepsilon} + \frac{q_2}{2}\right) = V_1.$$

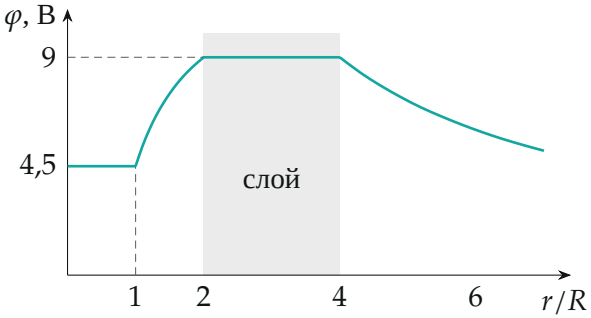
Отсюда

$$q_2 = \frac{4RV_2}{k}, \qquad q_1 = \frac{2\varepsilon R(V_1 - V_2)}{k},$$

$$x_2 = \frac{q_2}{q_1} = \frac{2V_2}{\varepsilon(V_1 - V_2)} = \frac{18}{2{,}5 \cdot (-4{,}5)} = -1{,}6.$$

Знак минус: $V_1 < V_2$, шар имеет потенциал ниже слоя, поэтому заряд шара отрицателен, хотя к нему подключён положительный полюс батареи.

5. Проверка. Размерность: x_1 и x_2 — отношения зарядов, безразмерны. Предел $\varepsilon \to 1$ (диэлектрика нет): $Q \to 0$, связанных зарядов нет — верно. Второй способ для x_2 — через ёмкость: шар и внутренняя поверхность слоя образуют сферический конденсатор $C = \dfrac{\varepsilon \cdot 2R}{k}$ (для радиусов R и $2R$), $q_1 = C(V_1 - V_2) = \dfrac{2\varepsilon R(V_1 - V_2)}{k}$ — то же самое. Ниже график $\varphi(r)$ по найденным зарядам: 4,5 В на шаре, рост в диэлектрике до 9 В, постоянный потенциал в металле слоя и спад $\propto 1/r$ снаружи.



Потенциал $\varphi(r)$, построенный по найденным зарядам; серая полоса — металл слоя.

Смысл: диэлектрик ослабляет поле шара, отсюда связанный заряд $0{,}6\,q_1$; а заряд шара определяет разность потенциалов $V_1 - V_2$, поэтому он отрицателен.

Ответ. 1) $x_1 = \dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 0{,}6$; 2) $x_2 = \dfrac{2V_2}{\varepsilon(V_1 - V_2)} = -1{,}6$.