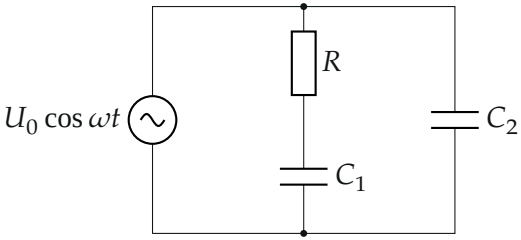
Две ветви переменного тока

Задача 5. [Курчатов 2024/25, 11 класс, задача 5] Цепь переменного тока состоит из двух параллельных ветвей. Левая ветвь — сопротивление $R = 2$ кОм и конденсатор ёмкостью $C_1 = 2{,}5$ мкФ, правая ветвь — конденсатор ёмкостью $C_2 = 1{,}5$ мкФ. На вход цепи подаётся напряжение $U_0 \cos \omega t$ с амплитудой $U_0 = 36$ В и круговой частотой $\omega = 400$ с$^{-1}$. В установившемся режиме сила тока в правой ветви периодически обращается в нуль. Для этого случая найдите следующие величины:

1. Абсолютную величину силы тока I в левой ветви. Числовой ответ выразите в миллиамперах.
2. Заряды конденсаторов q_1 и q_2. Числовые значения выразите в микрокулонах.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на установившийся переменный ток, класс — «векторная диаграмма». Обе ветви подключены прямо к источнику, поэтому напряжение на каждой ветви равно $U_0 \cos \omega t$. Ток через конденсатор C_2 равен скорости изменения его заряда и обращается в нуль, когда заряд (а значит, и напряжение источника) максимален. В этот момент и нужно найти ток левой ветви и заряды.

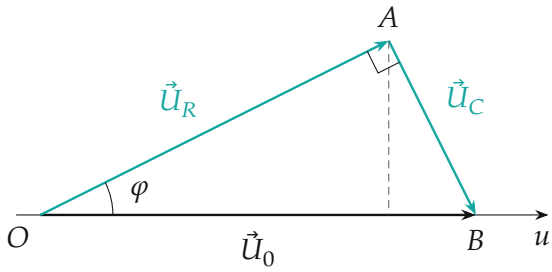
Обозначения. $u(t) = U_0 \cos \omega t$ — напряжение источника; i_1, i_2 — токи левой и правой ветвей; U_R, U_C — амплитуды напряжений на R и на C_1; φ — угол между векторами $\vec{U}_0$ и $\vec{U}_R$; $X = \dfrac{1}{\omega C_1} = 1$ кОм — ёмкостное сопротивление C_1; безразмерный параметр $\omega R C_1 = 400 \cdot 2000 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-6} = 2$.

1. Момент, когда $i_2 = 0$. Заряд второго конденсатора $q_2(t) = C_2 u(t) = C_2 U_0 \cos \omega t$, ток — скорость изменения заряда: $i_2 =$

$-\omega C_2 U_0 \sin \omega t$. Он равен нулю при $\cos \omega t = \pm 1$, то есть когда $u = \pm U_0$. Возьмём $u = U_0$ (при $u = -U_0$ меняются только знаки). Тогда

$$q_2 = C_2 U_0 = 1{,}5 \cdot 36 = 54 \text{ мкКл}.$$

2. Векторная диаграмма левой ветви. Ток в R и C_1 один и тот же. Напряжение на резисторе совпадает по фазе с током, на конденсаторе — отстаёт от тока на 90°. Поэтому векторы $\vec{U}_R$ и $\vec{U}_C$ перпендикулярны, а их сумма — вектор напряжения источника $\vec{U}_0$. Векторы вращаются с угловой скоростью ω, а мгновенные значения — проекции на горизонтальную ось. В нужный момент $u = U_0$, значит $\vec{U}_0$ лежит на оси.



Векторная диаграмма левой ветви в момент $u = U_0$: прямой угол при вершине A; мгновенные напряжения — проекции на ось u.

3. Амплитуды. Амплитуды напряжений связаны с амплитудой тока I_A: $U_R = I_A R$, $U_C = I_A X$, поэтому $U_C/U_R = 1/(\omega R C_1)$. Теорема Пифагора для треугольника OAB: $U_R^2 + U_C^2 = U_0^2$, откуда

$$U_R = \frac{U_0\, \omega R C_1}{\sqrt{1 + (\omega R C_1)^2}} = \frac{2 \cdot 36}{\sqrt{5}} \approx 32{,}2 \text{ В},$$

$$U_C = \frac{U_0}{\sqrt{1 + (\omega R C_1)^2}} = \frac{36}{\sqrt{5}} \approx 16{,}1 \text{ В},$$

$\cos \varphi = U_R/U_0$, $\sin \varphi = U_C/U_0$.

4. Пункт 1: ток. Мгновенное напряжение на резисторе — проекция

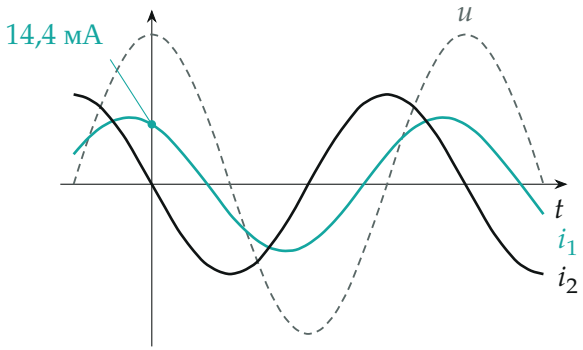
$\vec{U}_R$ на ось: $u_R = U_R \cos\varphi$; ток $i_1 = u_R/R$:

$$I = \frac{U_R\cos\varphi}{R} = \frac{U_0}{R}\cdot\frac{(\omega RC_1)^2}{1+(\omega RC_1)^2} = \frac{36}{2000}\cdot\frac{4}{5} = 14{,}4\text{ мА}.$$

5. Пункт 2: заряд C_1. Мгновенное напряжение на C_1 — проекция $\vec{U}_C$: $u_C = U_C\sin\varphi$;

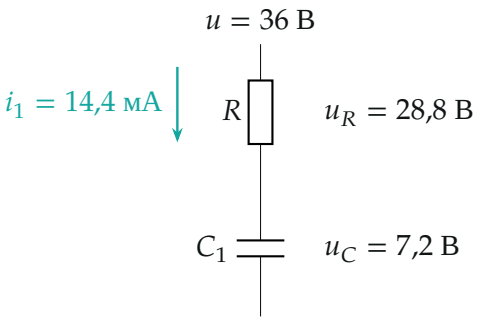
$$q_1 = C_1U_C\sin\varphi = \frac{C_1U_0}{1+(\omega RC_1)^2} = \frac{2{,}5\cdot 36}{5} = 18\text{ мкКл}.$$

Проверка: $u_R + u_C = 28{,}8 + 7{,}2 = 36\text{ В} = U_0$ — закон Кирхгофа для левой ветви выполнен.



Напряжение источника u (пунктир), токи i_1 (бирюза, амплитуда 16,1 мА, опережает u на $\varphi \approx 26{,}6°$) и i_2 (амплитуда 21,6 мА). При $t = 0$ $u = U_0$, $i_2 = 0$, $i_1 = 14{,}4$ мА.

6. Проверка вторым способом. Ток левой ветви $i_1 = I_A\cos(\omega t + \varphi)$, где $I_A = U_0/\sqrt{R^2+X^2} = 36/2236 \approx 16{,}1$ мА и $\operatorname{tg}\varphi = X/R = 0{,}5$ (ток опережает напряжение на ёмкостной нагрузке). При $t = 0$: $i_1 = I_A\cos\varphi = 16{,}1\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}} = 14{,}4$ мА — совпало. Размерности: ωRC_1 безразмерно, U_0/R — ток, C_1U_0 — заряд. Предел $R\to 0$: левая ветвь — чистая ёмкость, ток в ней тоже обращается в нуль при $u = U_0$, а формула даёт $I\to 0$, $q_1\to C_1U_0$ — верно.



Мгновенные значения в левой ветви в момент $i_2 = 0$: $u_R + u_C = u$.

Смысл: в момент остановки тока C_2 ток левой ветви не нулевой — он опережает напряжение по фазе, потому что в ветви есть ёмкость.

Ответ. 1) $I = \dfrac{U_0}{R} \cdot \dfrac{(\omega R C_1)^2}{1 + (\omega R C_1)^2} = 14{,}4$ мА; 2) $q_1 = \dfrac{C_1 U_0}{1 + (\omega R C_1)^2} = 18$ мкКл, $q_2 = C_2 U_0 = 54$ мкКл.