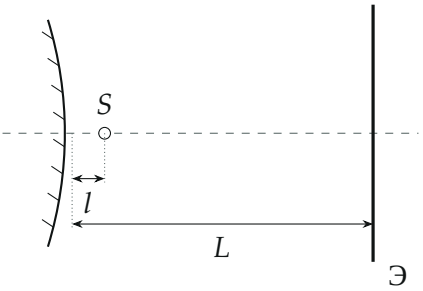
Интерференция с зеркалом

Задача 6. [Курчатов 2024/25, 11 класс, задача 6] Точечный источник S монохроматического света с длиной волны $\lambda = 550$ нм расположен на расстоянии $l = 1{,}0$ мм от выпуклого сферического зеркала с радиусом кривизны $R = 20$ см. На расстоянии $L = 5{,}0$ м от зеркала расположен плоский экран.

1. Опишите интерференционную картину на экране, найдите положения максимумов интенсивности света на экране.
2. Сколько интерференционных максимумов можно наблюдать в такой схеме? На каком минимальном расстоянии от центра экрана можно наблюдать интерференционную картину, если минимальная толщина наблюдаемой интерференционной полосы не превышает $\Delta x = 1{,}0$ мм?

Указание: при решении воспользуйтесь приближённым равенством $\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm x/2$, справедливым при малых $|x| \ll 1$.



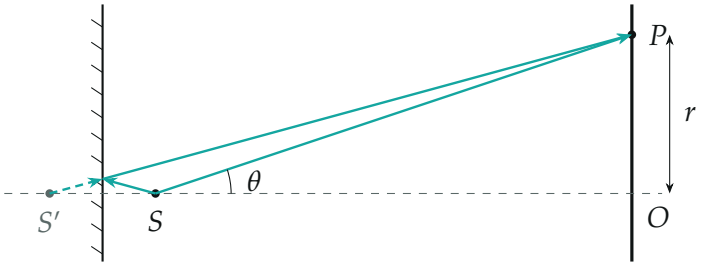
▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на интерференцию от двух когерентных источников. На экран приходят две волны: прямо от S и отражённая зеркалом. Отражённая волна идёт так, будто её испускает изображение S' источника в зеркале. Поэтому картина — как от двух точечных источников на одной оси, перпендикулярной экрану: кольца с общим центром. Разность хода зависит только от угла, под которым точка экрана видна из источников.

Обозначения. S' — изображение источника; d — расстояние SS'; P — точка экрана на расстоянии r от центра O; θ — угол между осью и направлением на P; k — номер (порядок) максимума.

1. Где изображение. Формула выпуклого зеркала (фокус мнимый, $F = -R/2$):

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{f} = -\frac{2}{R} \quad \Rightarrow \quad |f| = \frac{Rl}{R + 2l} = \frac{200 \cdot 1}{202} \approx 0{,}99 \text{ мм}.$$

Изображение мнимое, за зеркалом, почти на том же расстоянии l: на масштабе $l = 1$ мм кривизна ($R = 200$ мм) почти не сказывается, и зеркало можно считать плоским. Расстояние между источниками $d = l + |f| \approx 1{,}99$ мм $\approx 2l$.



Прямой луч SP и отражённый луч, продолжение которого (пунктир) идёт из изображения S'. Горизонтальный масштаб l сильно увеличен.

2. Разность хода. Расстояния от S и S' до P по теореме Пифагора ($L \mp l$ — расстояния от источников до экрана):

$$L_{1,2} = \sqrt{r^2 + (L \mp l)^2} \approx \sqrt{r^2 + L^2 \mp 2Ll},$$

$$L_{1,2} \approx \sqrt{r^2 + L^2}\sqrt{1 \mp \frac{2Ll}{r^2 + L^2}} \approx \sqrt{r^2 + L^2} \mp \frac{Ll}{\sqrt{r^2 + L^2}}.$$

Здесь отброшено $l^2 \ll Ll$ и применено указание. Разность хода

$$\Delta = L_2 - L_1 = \frac{2Ll}{\sqrt{r^2 + L^2}} = d\cos\theta, \qquad d \approx 2l.$$

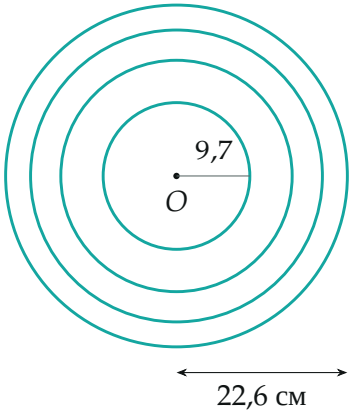
Это и понятно без вычислений: из далёкой точки P лучи от S и S' почти параллельны, и разность хода — проекция отрезка SS' на направление луча.

3. Пункт 1: условие максимума. При отражении от металлического зеркала волна теряет полволны, поэтому максимум — когда

$$\Delta + \frac{\lambda}{2} = k\lambda \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_k = \frac{(k-1/2)\lambda}{d},$$

$$r_k = L\,\mathrm{tg}\,\theta_k = L\sqrt{\left(\frac{d}{(k-1/2)\lambda}\right)^2 - 1}.$$

Картина — светлые и тёмные концентрические кольца с центром в O. Разность хода наибольшая в центре ($\Delta = d$) и убывает к краю, поэтому порядок k наибольший у центра и уменьшается с ростом радиуса. Числа ($d/\lambda = 1{,}99 \cdot 10^{-3}/5{,}5 \cdot 10^{-7} \approx 3618$): в центре $k \approx 3618{,}7$ — не целое, центр не строго светлый; первые светлые кольца $k = 3618, 3617, 3616$ — радиусы 9,7, 15,3, 19,3 см; кольцо $k = 3000$ — 3,4 м, $k = 2000$ — 7,5 м.



Центр картины: первые четыре светлых кольца ($k = 3618 \ldots 3615$) по формуле r_k; радиусы в сантиметрах.

4. Пункт 2: сколько максимумов. Радиус r_k существует, пока $\cos\theta_k \leq 1$, а $\theta \to 90°$ даёт $k \to 1$: на бесконечно большом экране видны

все порядки от $k = 1$ до

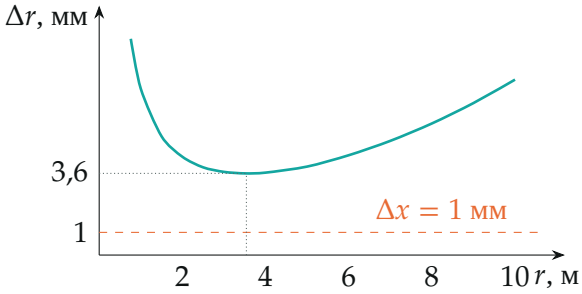
$$k_{\max} \approx \frac{d}{\lambda} \approx \frac{2l}{\lambda} \approx 3600.$$

5. Пункт 2: ширина полосы. Соседние порядки отличаются на λ по разности хода: $d\,|\Delta(\cos\theta)| = \lambda$, то есть $d \sin\theta\,\Delta\theta = \lambda$. Ширина кольца на экране $\Delta r = \dfrac{L\,\Delta\theta}{\cos^2\theta}$ (так как $r = L\,\mathrm{tg}\,\theta$):

$$\Delta r = \frac{L\lambda}{d \sin\theta \cos^2\theta}.$$

У центра ($\theta \to 0$) кольца широкие; далеко ($\theta \to 90°$) — тоже. Самые узкие — там, где максимально $\sin\theta\cos^2\theta$: при $\mathrm{tg}\,\theta = 1/\sqrt{2}$, то есть $r = L/\sqrt{2} \approx 3{,}5$ м, и

$$\Delta r_{\min} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{L\lambda}{d} = 2{,}6 \cdot \frac{5 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-7}}{1{,}99 \cdot 10^{-3}} \approx 3{,}6 \text{ мм}.$$



Ширина светлого кольца в зависимости от его радиуса, по точной формуле (точки посчитаны на python). Вся кривая выше Δx.

6. Пункт 2: где видна картина. Полоса различима, если её ширина не меньше $\Delta x = 1$ мм. Самая узкая полоса во всей картине шире: 3,6 мм $>$ 1 мм. Значит, ограничения нет — картина видна от самого центра экрана ($r_{\min} = 0$), со всеми ≈ 3600 кольцами (на достаточно большом экране). Ограничение появилось бы только при $\Delta x > 3{,}6$ мм.

У организаторов в ответе «картина видна дальше 10 м от центра»: они взяли приближение $r_k \approx \dfrac{2lL}{k\lambda}$ (оно верно лишь при $r \gg L$) и ошиблись в числах — по их же формуле $k = \sqrt{2lL/(\Delta x\lambda)} \approx 4300 > k_{\max}$, то есть и у них все кольца шире 1 мм.

Обратите внимание. Порядок интерференции *убывает* от центра к краю — наоборот по сравнению с кольцами Ньютона. И приближение «малых углов» здесь не годится: экран на расстоянии $L = 5$ м, а интересные кольца — на расстояниях $r \sim L$.

Проверка. Размерность: $L\lambda/d$ — длина. Предел $l \to 0$: $d \to 0$, порядков нет ($k_{\max} \to 0$), кольца бесконечно широкие — источник и изображение слились. Второй способ для Δr у центра: при малых θ $\Delta = d(1 - \theta^2/2)$, кольца $r_k = L\theta_k$ растут как $\sqrt{\text{номер от центра}}$ — как в таблице 9,7; 15,3; 19,3 см ($9{,}7\sqrt{1{,}68/0{,}68} = 15{,}2$ — совпало).

Смысл: источник у зеркала — это пара когерентных источников на расстоянии $2l$ вдоль оси; при $2l \gg \lambda$ они дают тысячи колец, и все достаточно широкие, чтобы их разглядеть.

Ответ. 1) концентрические кольца с центром на оси; светлые при $r_k = L\sqrt{\left(\dfrac{2l}{(k-1/2)\lambda}\right)^2 - 1}$, порядок убывает от центра (у центра $k \approx 3618$, первые кольца $r \approx 9{,}7$; 15,3; 19,3 см); 2) $k_{\max} \approx 2l/\lambda \approx 3600$ максимумов; самая узкая полоса $\Delta r_{\min} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\dfrac{L\lambda}{2l} \approx 3{,}6$ мм $> \Delta x$, поэтому картина видна от самого центра экрана ($r_{\min} = 0$).