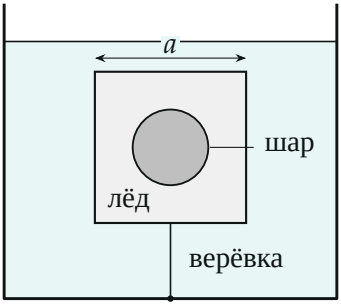
Шар во льду

Задача 1. [Курчатов 2024/25, 7 класс, задача 1] Деревянный шар заморожен внутри ледяного куба и прикреплён верёвкой ко дну сосуда с водой. Куб полностью погружён в воду. После полного таяния льда сила натяжения верёвки изменилась на $|\Delta T| = 0{,}4$ Н. Определите плотность льда, если длина ребра ледяного куба составляет $a = 7$ см, плотность воды равна $\rho_в = 1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Поясняющий рисунок: ледяной куб с ребром a и деревянным шаром внутри привязан верёвкой ко дну и целиком находится под водой.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие тела в жидкости. Шар со льдом тянется вверх силой Архимеда, верёвка удерживает его у дна. Когда лёд тает, шар остаётся привязанным, а из «тела» исчезает лёд — вместе со своим весом и со своей долей силы Архимеда. Главная идея: изменение натяжения равно разности силы Архимеда, действовавшей на лёд, и силы тяжести льда. Ключевой закон — условие равновесия (второй закон Ньютона с нулевым ускорением) до и после таяния.

Обозначения. $V_ш$ и $m_ш$ — объём и масса шара; $V_л = a^3 - V_ш$ и $m_л = \rho_л V_л$ — объём и масса льда; T_1 и T_2 — силы натяжения верёвки до и после таяния. Ось y направим вертикально вверх: все силы вертикальны.

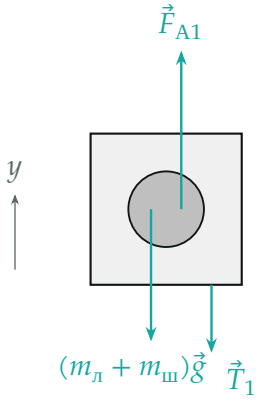
1. До таяния. Тело — куб со льдом и шаром (объём a^3). На него действуют сила тяжести $(m_л + m_ш)\vec{g}$, сила Архимеда $\vec{F}_{A1}$ и сила натяжения верёвки $\vec{T}_1$, направленная вниз, к дну (рисунок 2). Сила Архимеда равна

весу воды в объёме всего погружённого тела:

$$F_{A1} = \rho_в g\, a^3.$$

Второй закон Ньютона для куба с шаром в проекции на ось y (тело покоится):

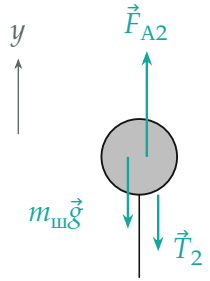
$$F_{A1} - (m_л + m_ш)g - T_1 = 0.$$



Силы на куб со льдом и шаром до таяния. Длины стрелок примерно по модулю: сила Архимеда больше силы тяжести, разницу компенсирует верёвка.

2. После таяния. Теперь тело — один шар. На него действуют сила тяжести $m_ш\vec{g}$, сила Архимеда $F_{A2} = \rho_в g V_ш$ и натяжение $\vec{T}_2$ вниз (рисунок 3). Шар деревянный и легче воды, поэтому верёвка по-прежнему натянута. Второй закон Ньютона для шара в проекции на ось y:

$$\rho_в g V_ш - m_ш g - T_2 = 0.$$

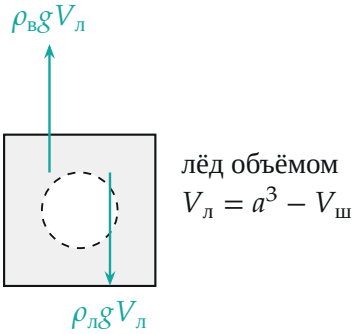


Силы на шар после таяния льда. Лёд стал водой и больше не входит в тело.

3. Изменение натяжения. Вычтем уравнение шага 2 из уравнения шага 1 — масса шара сократится:

$$T_1 - T_2 = \rho_в g\,(a^3 - V_ш) - m_л g = (\rho_в - \rho_л)\,g\,V_л.$$

Это и есть главная идея в формуле: на лёд действовали сила Архимеда $\rho_в g V_л$ вверх и его сила тяжести $\rho_л g V_л$ вниз; их разность и держала верёвка (рисунок 4). Лёд легче воды, поэтому $T_1 - T_2 > 0$: натяжение уменьшилось.



Вклад льда: сила Архимеда на лёд и его сила тяжести. Их разность — та часть натяжения, которая исчезла после таяния.

4. Плотность льда. Объём шара в условии не задан, значит, в задаче он подразумевается малым по сравнению с объёмом куба: $V_л \approx a^3$. Тогда

$$\rho_л = \rho_в - \frac{|\Delta T|}{g\,a^3} = 1000 - \frac{0{,}4}{10 \cdot (0{,}07)^3} = 1000 - 116{,}6 \approx 883 \text{ кг/м}^3.$$

Обратите внимание: сокращается всё, что относится к шару, кроме его объёма в $V_{\text{л}}$. Если шар не мал, то из того же уравнения получится

$$\rho_{\text{л}} = \rho_{\text{в}} - \frac{|\Delta T|}{g\,(a^3 - V_{\text{ш}})},$$

лёд окажется ещё легче; без $V_{\text{ш}}$ точнее посчитать нельзя.

Проверка. Размерность: $\dfrac{\text{Н}}{(\text{м/с}^2)\cdot\text{м}^3} = \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Предел: при $\Delta T \to 0$ получаем $\rho_{\text{л}} = \rho_{\text{в}}$ — лёд с плотностью воды не меняет натяжения, так и должно быть. Ответ близок к табличной плотности льда 900 кг/м^3.

Смысл: верёвка держала «лишнюю» силу Архимеда льда; когда лёд стал водой той же массы, эта добавка пропала.

Ответ. $\rho_{\text{л}} = \rho_{\text{в}} - \dfrac{|\Delta T|}{g\,a^3} \approx 883$ кг/м^3 (объём шара мал по сравнению с объёмом куба).