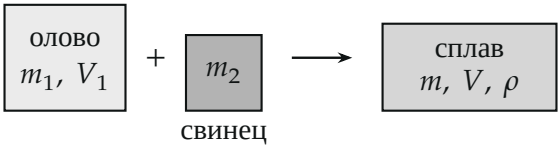
Припой

Задача 3. [Курчатов 2024/25, 7 класс, задача 3] Юный экспериментатор Александр получает припой из сплава олова и свинца. Плотности олова и свинца равны $\rho_1 = 7{,}3$ г/см^3 и $\rho_2 = 11{,}3$ г/см^3. Смешав в некоторой пропорции компоненты припоя, Александр получил припой с плотностью $\rho = 8{,}4$ г/см^3. Сверившись со своими расчётами для средней плотности смеси, Александр заметил, что получившееся в эксперименте значение на 5% выше расчётного. Осознав, что объём сплава может быть не равен сумме объёмов сплавляемых компонент, Александр с лёгкостью вычислил массовые доли олова и свинца в своём сплаве. Сделайте это и вы.



Поясняющий рисунок: олово и свинец сплавляют; масса сохраняется, $m = m_1 + m_2$, а объём V может быть меньше $V_1 + V_2$.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на среднюю плотность смеси. «Расчётная» плотность — та, что получилась бы, если объёмы компонент просто складываются. Настоящий сплав на 5% плотнее: при сплавлении объём уменьшился, а масса и пропорция компонент остались прежними. Главная идея: по опытной плотности находим расчётную, а по расчётной — пропорцию, потому что в расчётную формулу входят только ρ_1, ρ_2 и доли компонент.

Обозначения. m_1, m_2 — массы олова и свинца, $m = m_1 + m_2$; $w_1 = m_1/m$ и $w_2 = m_2/m = 1 - w_1$ — их массовые доли (их и ищем); $V_1 = m_1/\rho_1$, $V_2 = m_2/\rho_2$ — объёмы компонент до сплавления; $\rho_\text{р}$ — расчётная плотность; $x = V_1/(V_1 + V_2)$ — объёмная доля олова.

1. Расчётная плотность. Опытная плотность на 5% выше расчётной: $\rho = 1{,}05\,\rho_\text{р}$, откуда

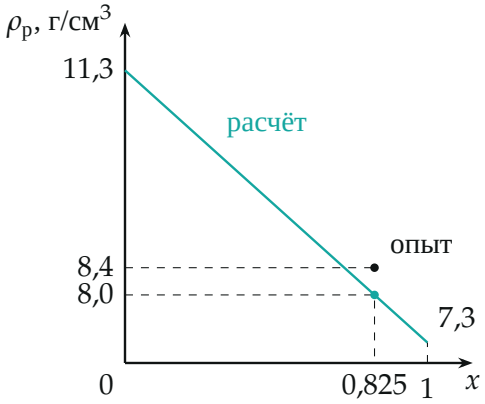
$$\rho_\text{р} = \frac{\rho}{1{,}05} = \frac{8{,}4}{1{,}05} = 8{,}0 \text{ г/см}^3.$$

2. Объёмная доля олова. По определению средней плотности, если объёмы складываются,

$$\rho_{\text{р}} = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2} = \rho_1 x + \rho_2 (1 - x).$$

Это прямая на графике $\rho_{\text{р}}(x)$: от ρ_2 (чистый свинец, $x = 0$) до ρ_1 (чистое олово, $x = 1$), рисунок 2. Отсюда

$$x = \frac{\rho_2 - \rho_{\text{р}}}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{11{,}3 - 8{,}0}{11{,}3 - 7{,}3} = \frac{3{,}3}{4} = 0{,}825.$$



Расчётная плотность смеси — линейная функция объёмной доли олова x. Точка с $\rho_p = 8{,}0$ г/см^3 даёт $x = 0{,}825$; опытные 8,4 г/см^3 — выше прямой на 5%.

Обратите внимание: x — доля олова в объёме *до* сплавления, $V_1 + V_2$, а не в объёме готового сплава. Именно поэтому в расчёт идёт $\rho_{\text{р}}$, а не опытная ρ: подставив 8,4, мы бы приписали сжатие при сплавлении изменению пропорции.

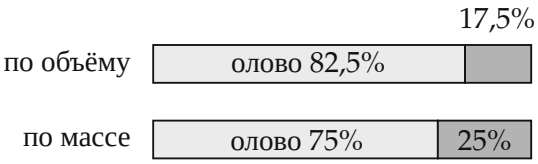
3. От объёмных долей к массовым. Массовая доля олова — его масса, делённая на всю массу, а массы выражаем через плотности и объёмы

до сплавления:

$$w_1 = \frac{\rho_1 V_1}{\rho_\text{р}(V_1 + V_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_\text{р}}\,x = \frac{7{,}3}{8{,}0}\cdot 0{,}825 \approx 0{,}753,$$

$$w_2 = \frac{\rho_2}{\rho_\text{р}}\,(1-x) = \frac{11{,}3}{8{,}0}\cdot 0{,}175 \approx 0{,}247.$$

Сумма $w_1 + w_2 = 1$ — контроль арифметики. Олово занимает 82,5% объёма, но лишь 75% массы: оно легче свинца (рисунок 3).

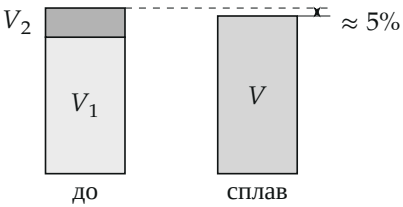


Доли олова (светлое) и свинца (тёмное) по объёму до сплавления и по массе.

4. Второй способ — сразу через массовые доли. Объёмы складываются в расчёте: $V_1 + V_2 = m/\rho_\text{р}$, то есть

$$\frac{w_1}{\rho_1} + \frac{1-w_1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho_\text{р}} \quad\Rightarrow\quad w_1 = \frac{\dfrac{1}{\rho_\text{р}} - \dfrac{1}{\rho_2}}{\dfrac{1}{\rho_1} - \dfrac{1}{\rho_2}} = \frac{0{,}1250 - 0{,}0885}{0{,}1370 - 0{,}0885} \approx 0{,}753.$$

То же. На рисунке 4 — объёмы: сумма объёмов компонент и объём сплава, меньший в 1,05 раза.



При сплавлении масса та же, а объём уменьшился: $V = (V_1 + V_2)/1{,}05$.

Проверка. Размерность: доли безразмерны, в формулах — отношения плотностей. Предел: если бы $\rho_{\text{р}} = \rho_1$, получили бы $x = 1$ и $w_1 = 1$ — чистое олово. Сплав с 75% олова по массе 8,0 г/см^3 по расчёту действительно ближе к олову, чем к свинцу.

Смысл: сжатие при сплавлении меняет плотность, но не состав; поэтому сначала «убираем» сжатие, а потом считаем доли по обычной формуле смеси.

Ответ. олово — $w_1 = \dfrac{\rho_1}{\rho_{\text{р}}} \cdot \dfrac{\rho_2 - \rho_{\text{р}}}{\rho_2 - \rho_1} \approx 75\%$, свинец — $\approx 25\%$, где $\rho_{\text{р}} = \rho/1{,}05 = 8{,}0$ г/см^3.