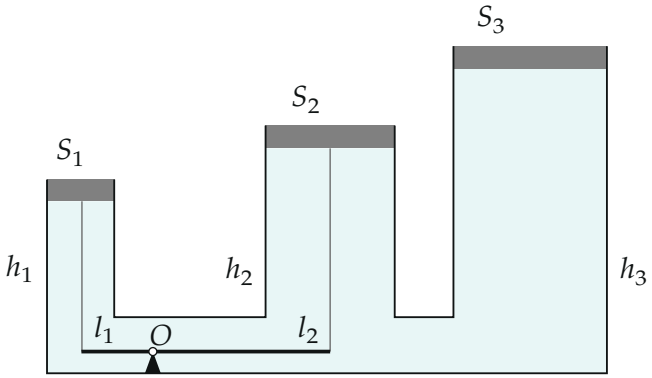
Рычаг и сообщающиеся сосуды

Задача 5. [Курчатов 2024/25, 7 класс, задача 5] На дне общего участка сообщающихся сосудов закреплён рычаг, как показано на рисунке. Рычаг находится в равновесии. Сосуд заполнен водой, причём каждое из колен сосуда плотно закрыто сверху подвижным поршнем. Плечи рычага l_1 и l_2 соединены тонкими прочными нерастяжимыми нитями с поршнями первых двух колен сосуда. Найдите соотношение $\dfrac{l_2}{l_1}$, если известно, что $h_3 = 2h_1$, $h_2 = 1{,}8\,h_1$, а площади поршней связаны соотношением $S_2 = 3S_1$.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на сообщающиеся сосуды с поршнями и рычаг. Поршни лёгкие; нити тянут поршни 1 и 2 вниз, и вода под ними сжата сильнее, чем под свободным поршнем 3 — поэтому уровни разные. Рычаг тянут вверх обе нити по разные стороны от оси O. Главная идея: из закона гидростатики находим добавочные давления под поршнями 1 и 2, умножаем на площади — получаем силы натяжения нитей, а правило моментов для рычага даёт отношение плеч.

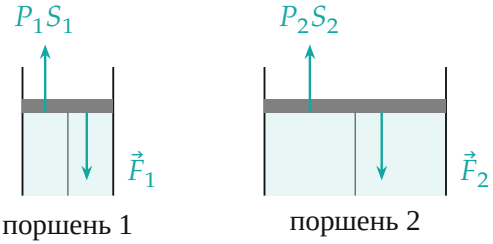
Обозначения. ρ — плотность воды; P_1, P_2 — добавочные (сверх атмосферного) давления воды под поршнями 1 и 2; F_1, F_2 — силы натяжения нитей; h_1, h_2, h_3 — высоты воды в коленах над дном.

1. Силы нитей на поршни. Поршни невесомые. На поршень 1 сверху действуют атмосфера и нить (вниз, с силой F_1), снизу — вода. Условие

равновесия поршня: сила давления воды сверх атмосферной уравновешивает нить (рисунок 2):

$$F_1 = P_1 S_1, \qquad F_2 = P_2 S_2.$$

Поршень 3 без нити, поэтому под ним давление равно атмосферному, добавочное давление — ноль. Атмосферное давление действует одинаково сверху на все поршни и дальше не участвует.



Силы на поршни 1 и 2 (без атмосферного давления, оно уравновешено с обеих сторон): нить тянет вниз, вода давит вверх добавочным давлением.

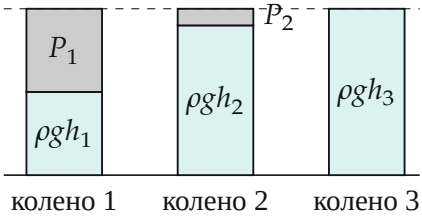
2. Добавочные давления. Вода покоится, поэтому давление на одном уровне во всей связной воде одинаково (закон сообщающихся сосудов). Сравним давление у дна под каждым коленом: оно равно давлению под поршнем плюс давление столба воды $\rho g h$:

$$P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2 = 0 + \rho g h_3.$$

Отсюда (рисунок 3)

$$P_2 = \rho g (h_3 - h_2) = 0{,}2\,\rho g h_1, \qquad P_1 = \rho g (h_3 - h_1) = \rho g h_1.$$

Оба давления положительны — обе нити действительно натянуты.



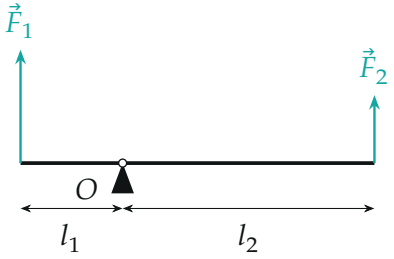
Давление у дна (сверх атмосферного) одно и то же под всеми коленами: столб воды (бирюза) плюс добавочное давление под поршнем (серое). Высота столбиков — в масштабе для $h_2 = 1{,}8h_1$, $h_3 = 2h_1$.

Силы натяжения нитей:

$$F_1 = P_1 S_1 = \rho g h_1 S_1, \qquad F_2 = P_2 S_2 = 0{,}2\,\rho g h_1 \cdot 3S_1 = 0{,}6\,\rho g h_1 S_1.$$

3. Правило моментов для рычага. Рычаг тонкий, вода давит на него со всех сторон, и её действие на рычаг не учитываем. Нити тянут рычаг вверх: нить 1 — слева от оси O на плече l_1, нить 2 — справа на плече l_2 (рисунок 4). Моменты этих сил поворачивают рычаг в разные стороны; сила реакции оси момента относительно O не создаёт. Правило моментов относительно оси O:

$$F_1 l_1 = F_2 l_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{l_2}{l_1} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{\rho g h_1 S_1}{0{,}6\,\rho g h_1 S_1} = \frac{5}{3}.$$



Силы нитей на рычаг (в масштабе: $F_2 = 0{,}6F_1$, $l_2 = \frac{5}{3}l_1$).

Обратите внимание: из одного уравнения сообщающихся сосудов для колен 1 и 2 отношение не найти — нужно третье колено со свободным поршнем: оно задаёт «нулевой» уровень добавочного давления и даёт P_1 и P_2 по отдельности.

Проверка. Размерность: отношение длин безразмерно, как и отношение сил. Предел: если бы $h_2 = h_3$, то $P_2 = 0$, нить 2 не тянула бы, и уравновесить рычаг было бы нечем — формула даёт $l_2/l_1 \to \infty$. Знак: $l_2 > l_1$, так как правая нить тянет слабее ($F_2 = 0{,}6F_1$) и ей нужно более длинное плечо.

Смысл: поршень 2 широкий, но давление под ним почти атмосферное, поэтому его нить слабее; рычаг уравновешивается плечом в $5/3$ раза длиннее.

Ответ. $\dfrac{l_2}{l_1} = \dfrac{(h_3 - h_1)S_1}{(h_3 - h_2)S_2} = \dfrac{5}{3} \approx 1{,}7.$