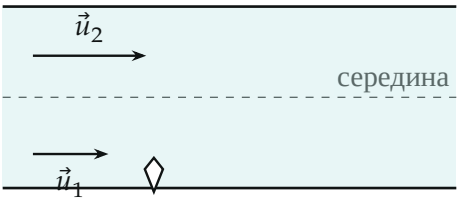
Лодка на реке

Задача 1. [Курчатов 2024/25, 8 класс, задача 1] Лодка начала движение от одного берега реки к противоположному. Лодочник направил нос лодки перпендикулярно берегу и начал грести веслами, сообщая лодке скорость поперёк реки, но за счёт течения лодку относило и вдоль реки со скоростью $u_1 = 10$ км/ч. Когда лодка достигла середины реки, начался сильный ветер, и её стало сносить вдоль реки уже со скоростью $u_2 = 15$ км/ч. Испугавшись, лодочник начал грести сильнее и в итоге всё же причалил к противоположному берегу. Оказалось, что средняя скорость движения лодки вдоль реки равна $\langle u \rangle = 12$ км/ч. Во сколько раз быстрее стал грести лодочник?



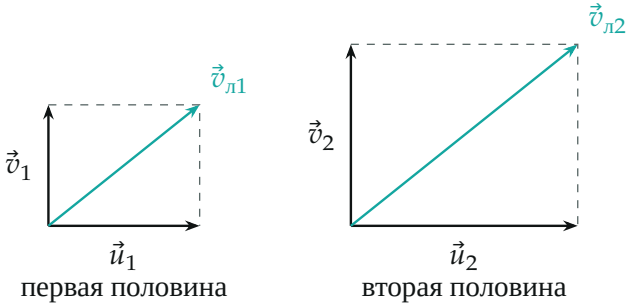
Поясняющий рисунок (вид сверху): лодка у нижнего берега носом поперёк реки; течение сносит её со скоростью u_1, на второй половине (выше штриховой) ветер добавляет снос до u_2.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача кинематики на сложение движений и среднюю скорость. Движение лодки — сумма двух независимых движений: поперёк реки (его даёт гребля, скорость v_1, потом v_2) и вдоль реки (снос u_1, потом u_2). Поперечное движение задаёт, сколько времени лодка проводит на каждой половине реки, а средняя скорость сноса — это полный снос, делённый на полное время, то есть среднее u_1 и u_2 «с весами» — временами. Из заданного среднего находим отношение времён, а из него — отношение скоростей гребли.

Обозначения. $2D$ — ширина реки; v_1, v_2 — скорости лодки поперёк реки на первой и второй половинах; T_1, T_2 — времена движения на них; S — полный снос вдоль реки. Ось x — вдоль течения, ось y — поперёк реки.

1. Времена на половинах. Нос лодки всё время направлен поперёк реки, поэтому вдоль оси y лодка движется равномерно со скоростью гребли, а снос на это движение не влияет:

$$T_1 = \frac{D}{v_1}, \qquad T_2 = \frac{D}{v_2}.$$



Скорость лодки относительно берега $\vec{v}_л$ (бирюзовая) — сумма скорости поперёк реки и скорости сноса. Масштаб: $u_2 = 1{,}5\,u_1$ и (по ответу) $v_2 = 1{,}5\,v_1$.

2. Полный снос и средняя скорость сноса. Вдоль оси x лодка на первой половине проходит u_1T_1, на второй — u_2T_2. Средняя скорость вдоль реки по определению — весь путь вдоль реки, делённый на всё время:

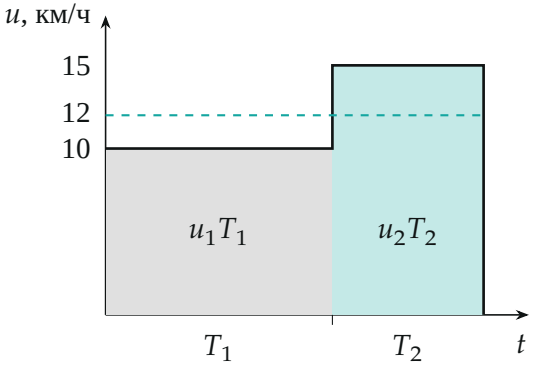
$$\langle u \rangle = \frac{S}{T_1 + T_2} = \frac{u_1T_1 + u_2T_2}{T_1 + T_2}.$$

3. Отношение времён. Умножим на $T_1 + T_2$ и соберём слагаемые:

$$u_1T_1 + u_2T_2 = \langle u \rangle (T_1 + T_2) \quad \Rightarrow \quad (\langle u \rangle - u_1)\,T_1 = (u_2 - \langle u \rangle)\,T_2,$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{u_2 - \langle u \rangle}{\langle u \rangle - u_1} = \frac{15 - 12}{12 - 10} = \frac{3}{2}.$$

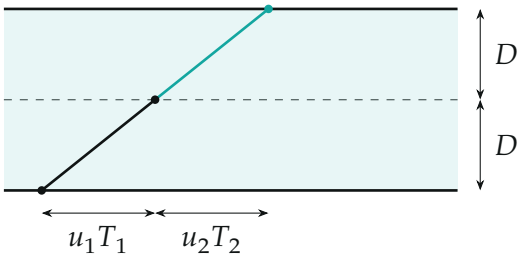
Среднее 12 км/ч ближе к 10, чем к 15, — значит на первой половине лодка провела больше времени.



Скорость сноса от времени при $T_1 : T_2 = 3 : 2$. Площадь под ступенькой — полный снос S; штриховая на уровне 12 км/ч даёт ту же площадь за то же время: «лишнее» над ней справа $(3 \cdot 2)$ равно «недостающему» слева $(2 \cdot 3)$.

4. Отношение скоростей гребли. Из шага 1 $T_1/T_2 = v_2/v_1$ (половины реки одинаковой ширины), поэтому

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$



Траектория лодки относительно берега (по вычисленным точкам, $v_1 = 8$ км/ч, $v_2 = 12$ км/ч). Сносы на половинах равны: $u_1T_1 = u_2T_2$, поэтому путь — одна прямая.

Обратите внимание. Средняя скорость сноса — не полусумма u_1 и u_2 (она равна 12,5 км/ч), а среднее по времени. Если бы лодочник не стал грести сильнее, времена были бы равны и среднее было бы 12,5 км/ч;

меньшее среднее 12 км/ч и говорит, что вторую половину лодка прошла быстрее.

Проверка. Подстановка: при $T_1 = 3$, $T_2 = 2$ (в любых единицах) $\dfrac{10 \cdot 3 + 15 \cdot 2}{5} = 12$ км/ч — верно. Безразмерный ответ — отношение скоростей. Любопытный итог: $v_2/v_1 = u_2/u_1 = 1{,}5$, то есть лодочник ровно скомпенсировал ветер — угол траектории к берегу не изменился (рисунок 4), и сносы на обеих половинах одинаковы.

Смысл: средняя скорость — это среднее, взвешенное по времени; по ней можно восстановить, сколько времени тело провело на каждом участке.

Ответ. В $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{u_2 - \langle u \rangle}{\langle u \rangle - u_1} = 1{,}5$ раза.