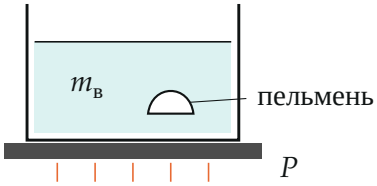
Пельмени

Задача 2. [Курчатов 2024/25, 8 класс, задача 2] Вероника собралась готовить обед и достала из холодильника пельмени. Каждый пельмень имеет массу $m_п = 20$ г, состоит на 70% по массе из воды и имеет начальную температуру $t_1 = -20\,°C$. Вероника поставила на плиту кастрюлю, в которой находится $m_в = 1{,}2$ кг воды, которая вскоре начала кипеть при температуре $t_2 = 100\,°C$.

1. Вероника бросила в кипящую воду один пельмень, после чего вода перестала кипеть. Через какое время τ вода в кастрюле закипит снова?
2. Вероника долила воды в кастрюлю, измерила её новую температуру $t_3 = 90\,°C$ и спустя $\Delta\tau = 20$ с стала забрасывать пельмени по одному через каждые 30 с (в моменты времени 20, 50, 80, 110 с), причём температура воды после забрасывания каждого пельменя уменьшалась на 1 °C. Постройте график зависимости температуры воды от времени в течение первых 2-ух минут, если суммарная масса пельменей значительно меньше массы воды.

Удельная теплоёмкость пельменя при температуре ниже 0 °C составляет $c_{п1} = 2000$ Дж/(кг·°C), а при температуре выше 0 °C — $c_{п2} = 3500$ Дж/(кг·°C), удельная теплоёмкость воды $c_в = 4200$ Дж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}34 \cdot 10^5$ Дж/кг. Полезная мощность плиты $P = 1000$ Вт. Считайте, что тепловой баланс между пельменями и водой устанавливается мгновенно.



Поясняющий рисунок: кастрюля с водой на плите мощностью P, в воду брошен замороженный пельмень.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на тепловой баланс с плавлением и нагревом от источника постоянной мощности. Холодный пельмень,

попав в кипяток, забирает у воды тепло: сначала нагревается до 0 °C, потом тает лёд (вода пельменя), потом пельмень нагревается дальше. Вода остывает ниже 100 °C и перестаёт кипеть. Плита за время τ должна вернуть системе ровно столько тепла, сколько ушло на пельмень. Во втором пункте температура растёт с постоянной скоростью, определяемой мощностью и теплоёмкостью воды, а каждый пельмень даёт скачок вниз на 1 °C. Тепловых потерь и испарения не учитываем.

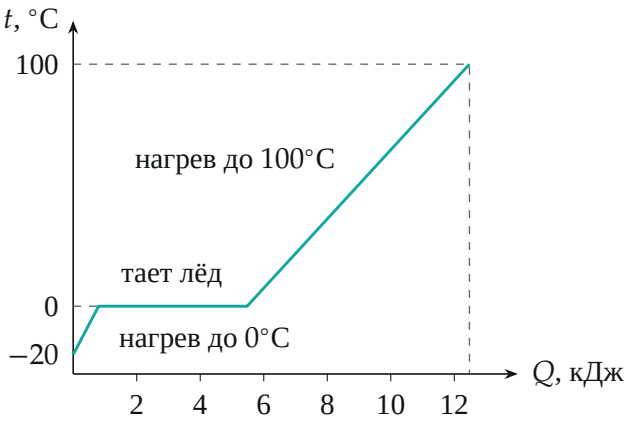
Обозначения. $w = 0{,}7$ — доля воды (льда) в пельмене; $t_0 = 0\,^\circ\text{C}$; Q — тепло, нужное пельменю от t_1 до t_2; M — масса воды в кастрюле во втором пункте; k — скорость роста температуры воды, °C/с.

Пункт 1. Тепло на пельмень. Пельмень проходит три этапа:

$$Q = m_\text{п} c_\text{п1}(t_0 - t_1) + w\, m_\text{п}\lambda + m_\text{п} c_\text{п2}(t_2 - t_0),$$

$$Q = 0{,}02 \cdot 2000 \cdot 20 + 0{,}7 \cdot 0{,}02 \cdot 3{,}34 \cdot 10^5 + 0{,}02 \cdot 3500 \cdot 100,$$

$$Q = 800 + 4676 + 7000 = 12\,476 \text{ Дж}.$$



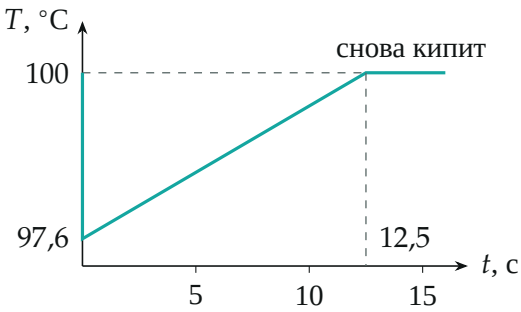
Температура пельменя в зависимости от полученного тепла (по вычисленным точкам): 0,8 кДж до 0°C, 4,68 кДж на таяние льда, 7,0 кДж на нагрев до 100°C.

Время до закипания. Мгновенный тепловой баланс уравнивает температуры воды и пельменя; плита нагревает их вместе. Вода снова за-

кипит, когда вся система вернётся к 100 °C, то есть когда плита восполнит тепло Q, ушедшее в пельмень (вода вернётся в исходное состояние, пельмень придёт в состояние «100 °C»):

$$P\tau = Q \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{Q}{P} = \frac{12\,476}{1000} \approx 12{,}5 \text{ с}.$$

Сама вода при этом остывает примерно на 2,4 °C — ниже кипения, как и сказано в условии.



Пункт 1: температура воды. В момент $t = 0$ брошен пельмень, вода остывает до 97,6 °C, затем плита за 12,5 с возвращает её к кипению.

Пункт 2. Масса воды после доливания. Масса воды теперь неизвестна, но её даёт скачок в 1 °C. Пельмень, брошенный в воду при ≈ 92 °C, получает от −20 °C до 91 °C тепло $800 + 4676 + 0{,}02 \cdot 3500 \cdot 91 \approx 1{,}19 \cdot 10^4$ Дж, и вода, отдав его, остывает на 1 °C:

$$Mc_\text{в} \cdot 1\,^\circ\text{C} \approx 1{,}19 \cdot 10^4 \text{ Дж} \quad \Rightarrow \quad Mc_\text{в} \approx 1{,}19 \cdot 10^4 \text{ Дж}/^\circ\text{C}, \quad M \approx 2{,}8 \text{ кг}.$$

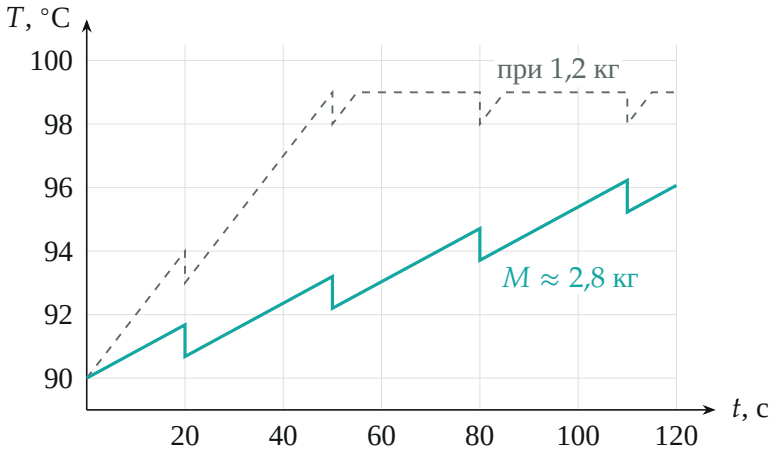
(Для пельменей при 90–96 °C это число меняется меньше чем на 2%.)

Скорость нагрева. Масса пельменей мала по сравнению с массой воды, поэтому вся мощность плиты идёт на нагрев воды: за время Δt тепло $P\Delta t = Mc_\text{в}\Delta T$, откуда

$$k = \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{P}{Mc_\text{в}} = \frac{1000}{1{,}19 \cdot 10^4} \approx 0{,}084\ ^\circ\text{C/с}$$

— на 1 °C за 12 с. За 30 с между пельменями вода нагревается на 2,5 °C и теряет 1 °C на пельмень: за каждый цикл +1,5 °C.

График. Точки (время, с — температура, °C): 0 — 90; 20 — 91,7, скачок до 90,7; 50 — 93,2 → 92,2; 80 — 94,7 → 93,7; 110 — 96,2 → 95,2; 120 — 96,1. Между скачками — отрезки прямых с наклоном 0,084 °C/с. До 100 °C за две минуты вода не доходит, кипения нет.



Пункт 2: температура воды от времени по вычисленным точкам (бирюзовая). Штриховая — график, который получается, если взять массу воды до доливания 1,2 кг (0,2 °C/с): вода закипает к 60 с, но тогда пельмень остужал бы её на 2,4 °C, а не на 1 °C.

У организаторов в решении наклон взят 0,2 °C/с по массе 1,2 кг, то есть до доливания; это противоречит условию: при такой массе пельмень остужал бы воду на ≈ 2,4 °C. Скачок в 1 °C однозначно задаёт теплоёмкость долитой воды.

Обратите внимание. Тепло на таяние льда — от массы воды в пельмене $wm_{\text{п}}$, а не от всей массы пельменя. Наклон графика определяется массой воды *после* доливания, и её можно найти только из скачка температуры.

Проверка. Размерности: $[P\tau]$ — Дж, $[P/(Mc)]$ — °C/с. Пункт 1 вторым способом: после броска система приходит к температуре $T_{\text{к}}$ из баланса $m_{\text{в}}c_{\text{в}}(100 - T_{\text{к}}) = 5476 + 70\,T_{\text{к}}$, то есть $T_{\text{к}} \approx 97{,}6$ °C; плита греет

воду и пельмень от $T_к$ до 100 °C: $\tau = \dfrac{(5040+70)\cdot 2{,}44}{1000} \approx 12{,}5$ с — то же. Пункт 2: при $Mc_в = 1{,}19\cdot 10^4$ Дж/°C и пельмене при 91 °C скачок $1{,}19\cdot 10^4/1{,}19\cdot 10^4 = 1$ °C — сходится с условием.

Смысл: замороженный пельмень — это в основном лёд, и его плавление забирает больше трети нужного тепла.

Ответ. 1) $\tau = \dfrac{m_п\,(c_{п1}(t_0-t_1)+w\lambda+c_{п2}(t_2-t_0))}{P} \approx 12{,}5$ с; 2) ломаная: рост $\approx 0{,}084$ °C/с (теплоёмкость воды после доливания $\approx 1{,}19\cdot 10^4$ Дж/°C из скачка в 1 °C), скачки вниз на 1 °C в 20, 50, 80, 110 с; точки 90 → 91,7/90,7 → 93,2/92,2 → 94,7/93,7 → 96,2/95,2 → 96,1 °C, кипения нет.