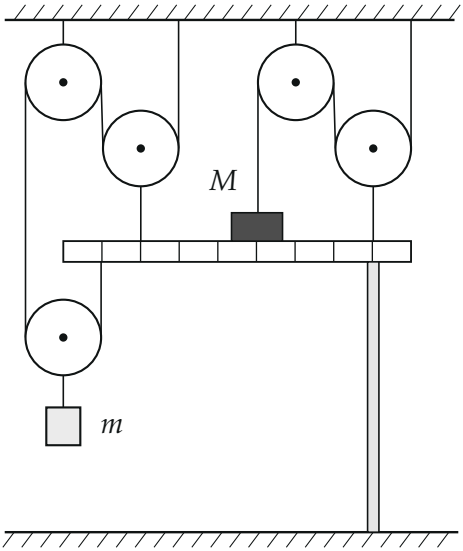
# Планка на блоках

**Задача 3.** [Курчатов 2024/25, 8 класс, задача 3] На тонкой невесомой планке, соединённой невесомыми верёвками с системой невесомых блоков, расположен груз массой $M = 35$ кг. Планка поддерживается устойчивой вертикальной доской.

1. Определите, при каких значениях массы $m$ груза, подвешенного к блоку, система останется в равновесии.
2. Определите, при каких значениях массы $m$ груза, подвешенного к блоку, планка сможет остаться в равновесии после удаления поддерживающей доски.

Вертикальные чёрточки делят планку на равные части. Трение во всей системе отсутствует, масса планки и блоков пренебрежимо мала.



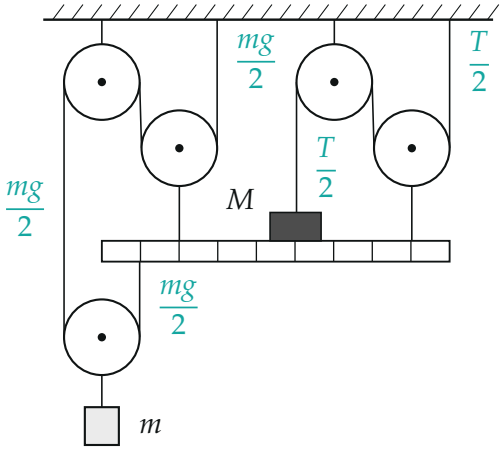

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие рычага (планки) с блоками. Сначала по блокам находим, с какими силами верёвки тянут планку: левая верёвка натянута весом груза $m$, натяжение правой неизвестно. Потом планку вместе с грузом $M$ рассматриваем как одно тело: для равновесия сумма сил равна нулю и сумма моментов равна нулю.

Неизвестных два — натяжение правой верёвки и сила реакции доски $N$. Равновесие возможно, только если все «односторонние» силы имеют разрешённый знак: доска может только подпирать ($N \geq 0$), верёвка — только тянуть, а груз $M$ должен лежать на планке.

**Обозначения.** $L$ — длина одной части планки (их 9); номера отметок $0, 1, \ldots, 9$ слева направо. $\dfrac{T}{2}$ — сила натяжения правой верёвки, $T$ — сила, с которой подвижный блок справа тянет планку вверх; $N$ — сила реакции доски (в отметке 8). Левая верёвка привязана к планке в отметке 1, левый подвижный блок висит на планке в отметке 2; правая верёвка привязана к грузу $M$ (отметка 5), правый подвижный блок висит на планке в отметке 8.

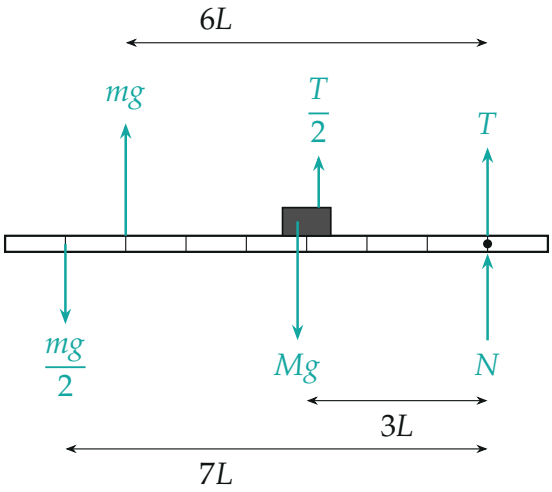
**1. Левая верёвка.** Блоки невесомы и без трения, поэтому натяжение одной верёвки всюду одинаково. Нижний подвижный блок с грузом $m$ висит на двух ветвях верёвки — второй закон Ньютона для блока с грузом (равновесие): $2T_{\text{л}} = mg$, $T_{\text{л}} = \dfrac{mg}{2}$. Следовательно, на планку действуют: в отметке 1 — ветвь верёвки вниз, $\dfrac{mg}{2}$; в отметке 2 — блок, висящий на двух ветвях, вверх, $2 \cdot \dfrac{mg}{2} = mg$.

**2. Правая верёвка.** Она одна и тоже натянута одинаково, $\dfrac{T}{2}$. Она тянет груз $M$ вверх с силой $\dfrac{T}{2}$ (отметка 5), а правый подвижный блок на двух ветвях тянет планку вверх с силой $T$ (отметка 8).




*Натяжения верёвок: левая верёвка всюду натянута силой $mg/2$ (груз $m$ висит на двух её ветвях), правая — силой $T/2$.*

**3. Равновесие планки с грузом $M$.** Внешние силы на систему «планка + груз $M$»: $\frac{mg}{2}$ вниз (отметка 1), $mg$ вверх (отметка 2), $Mg$ вниз и $\frac{T}{2}$ вверх (отметка 5), $T$ и $N$ вверх (отметка 8).




*Силы на систему «планка + груз $M$» (длины стрелок условные). Ось моментов — через точку опоры на доску (отметка 8), где приложены $T$ и $N$; плечи остальных сил — $7L$, $6L$ и $3L$.*

Условие равновесия сил в проекции на вертикаль:

$$mg - \frac{mg}{2} + \frac{T}{2} - Mg + T + N = 0.$$

Правило моментов относительно оси через отметку 8 (выбрана так, чтобы $T$ и $N$ не вошли): силы левее оси, направленные вниз, поворачивают планку против часовой стрелки, направленные вверх — по часовой:

$$\frac{mg}{2} \cdot 7L + \left( Mg - \frac{T}{2} \right) \cdot 3L = mg \cdot 6L.$$

Из второго уравнения

$$\frac{3}{2} T = 3Mg - \frac{5}{2} mg \quad \Rightarrow \quad T = 2Mg - \frac{5}{3} mg,$$

из первого

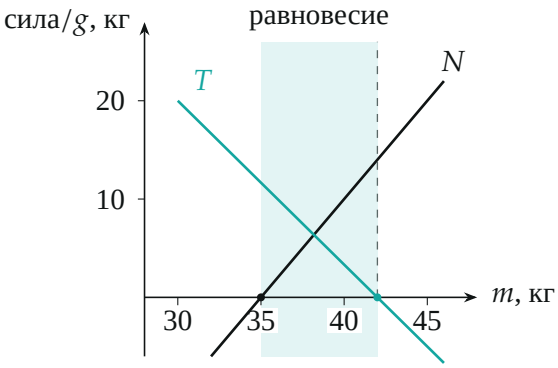
$$N = Mg - \frac{mg}{2} - \frac{3}{2} T = 2mg - 2Mg = 2g(m - M).$$

**Пункт 1. Когда равновесие возможно.** Три ограничения:

- доска только подпирает: $N \geq 0 \;\Rightarrow\; m \geq M$;
- верёвка только тянет: $T \geq 0 \;\Rightarrow\; m \leq \frac{6}{5} M$;
- груз $M$ не отрывается от планки: $\frac{T}{2} \leq Mg \;\Rightarrow\; m \geq 0$ — выполнено всегда.

Итого

$$M \leq m \leq \frac{6}{5} M, \qquad 35 \text{ кг} \leq m \leq 42 \text{ кг}.$$




*Сила реакции доски $N = 2g(m - M)$ (чёрная) и сила $T = g(2M - \frac{5}{3}m)$ (бирюзовая), в килограммах-силы, при $M = 35$ кг. Обе неотрицательны только на отрезке $35 \le m \le 42$ кг (закрашен): левее доска должна была бы тянуть планку вниз, правее — верёвка толкать.*

**Пункт 2. Без доски.** Доски нет — значит $N = 0$:

$$2g(m - M) = 0 \quad \Rightarrow \quad m = M = 35 \text{ кг}.$$

При этом $T = 2Mg - \frac{5}{3}Mg = \frac{1}{3}Mg > 0$ — верёвка натянута, груз $M$ лежит на планке ($T/2 = \frac{1}{6}Mg < Mg$), равновесие возможно. При любой другой массе момент сил относительно отметки 8 не уравновешивается без доски.

**Обратите внимание.** Правая верёвка привязана к грузу $M$, а не к планке: она уменьшает давление груза на планку на $T/2$, поэтому в правило моментов входит $Mg - T/2$ с плечом $3L$. Сила, с которой подвижный блок тянет планку, — сумма натяжений двух ветвей, а привязанный конец верёвки тянет с силой одной ветви.

**Проверка.** Размерности: все слагаемые — силы (или силы на длину в моментах). Граничные значения: при $m = 42$ кг $T = 70g - 70g = 0$, $N = 14g$; при $m = 35$ кг $N = 0$, $T = \frac{35}{3}g$. Проверка моментов относительно другой оси (отметка 0) при $m = 38$ кг: $T = \frac{20}{3}g$, $N = 6g$; моменты вверх $38g \cdot 2 + \frac{10}{3}g \cdot 5 + \left(\frac{20}{3}g + 6g\right) \cdot 8 = 76g + 16{,}7g + 101{,}3g = 194g$, вниз $19g \cdot 1 + 35g \cdot 5 = 194g$ — сходится.

Смысл: доска нужна, только чтобы подпирать; если груз $m$ «перетя-

гивает» правую верёвку до нуля, рычаг уже ничем не уравновесить.

**Ответ.** 1) $M \le m \le \frac{6}{5}M$, то есть 35 кг $\le m \le$ 42 кг; 2) $m = M =$ 35 кг.