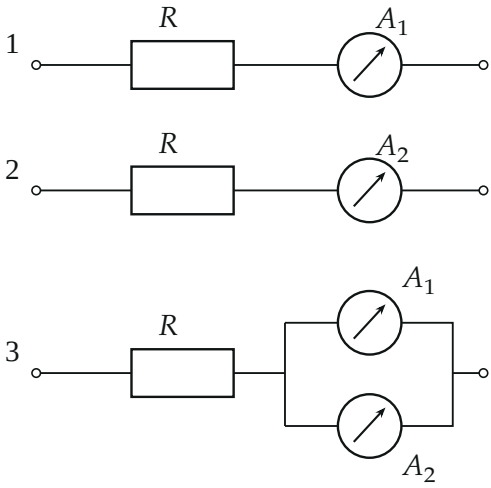
Неидеальные амперметры

Задача 4. [Курчатов 2024/25, 8 класс, задача 4] Вероника определяет сопротивление резистора R, используя источник напряжения $U = 12$ В и два неидеальных амперметра A_1 и A_2 с неизвестными сопротивлениями R_1 и R_2 соответственно. Она проводит три эксперимента. В первом опыте последовательно соединены резистор R и амперметр A_1, сила тока в цепи равна $I_1 = 2{,}4$ А. Во втором опыте последовательно с тем же резистором включается амперметр A_2, и сила тока равна $I_2 = 2{,}0$ А. В третьем опыте резистор R последовательно соединён с параллельно соединёнными амперметрами A_1 и A_2; общая сила тока в цепи, то есть сумма показаний обоих амперметров, равна $I_3 = 3$ А. Найдите сопротивление резистора R.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на закон Ома для цепи с неидеальными приборами: амперметр — такой же резистор, только он ещё и показывает ток через себя. Три опыта — три уравнения для трёх неизвестных R, R_1, R_2. Главная идея: из каждого опыта находим полное сопротивление цепи U/I, затем выражаем R_1 и R_2 через R и подставляем в третье уравнение.

Обозначения. R_1, R_2 — сопротивления амперметров A_1, A_2; R_{12} — сопротивление параллельно соединённых амперметров в третьем опыте. Источник идеальный: напряжение U на зажимах цепи в каждом опыте одно и то же.

1. Первые два опыта. Резистор и амперметр соединены последовательно, их сопротивления складываются. Закон Ома для всей цепи:

$$R + R_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{12}{2{,}4} = 5\ \text{Ом}, \qquad R + R_2 = \frac{U}{I_2} = \frac{12}{2{,}0} = 6\ \text{Ом}.$$

Отсюда

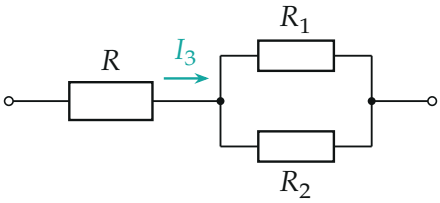
$$R_1 = 5 - R, \qquad R_2 = 6 - R \quad (\text{в омах}).$$

2. Третий опыт. Амперметры включены параллельно (рисунок 2), их общее сопротивление

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

и эта пара соединена с R последовательно. Через R идёт весь ток I_3 — сумма показаний амперметров. Закон Ома для всей цепи:

$$R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{U}{I_3} = \frac{12}{3} = 4\ \text{Ом}.$$



Эквивалентная схема третьего опыта: амперметры — резисторы R_1 и R_2, соединённые параллельно; через R идёт весь ток I_3.

3. Уравнение для R. Подставим R_1 и R_2 из шага 1:

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(5 - R)(6 - R)}{11 - 2R} = \frac{30 - 11R + R^2}{11 - 2R},$$

$$R + \frac{30 - 11R + R^2}{11 - 2R} = 4.$$

Умножим обе части на $11 - 2R$ (оно положительно, так как $R_1 + R_2 > 0$):

$$11R - 2R^2 + 30 - 11R + R^2 = 44 - 8R \quad \Rightarrow \quad R^2 - 8R + 14 = 0.$$

Корни:

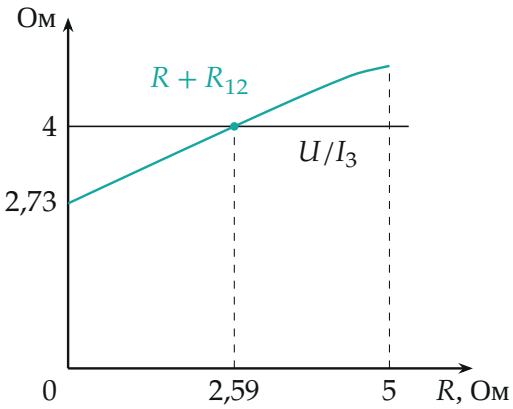
$$R = 4 \pm \sqrt{16 - 14} = 4 \pm \sqrt{2}\ \text{Ом}.$$

4. Выбор корня. Сопротивление амперметра положительно, поэтому $R_1 = 5 - R > 0$, то есть $R < 5$ Ом. Корень $4 + \sqrt{2} \approx 5{,}41$ Ом даёт $R_1 < 0$ — не подходит. Остаётся

$$R = 4 - \sqrt{2} \approx 2{,}59\ \text{Ом},$$

$$R_1 = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}41\ \text{Ом}, \qquad R_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}41\ \text{Ом}.$$

Графически (рисунок 3): полное сопротивление цепи третьего опыта $R + R_{12}$ растёт с R и равно 4 Ом ровно в одной точке промежутка $0 < R < 5$.



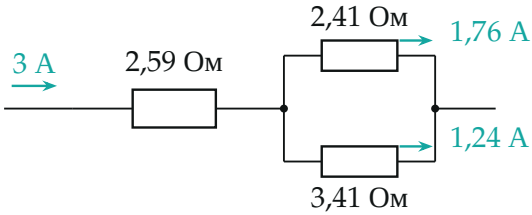
Полное сопротивление цепи третьего опыта $R + R_{12}$ как функция R (с $R_1 = 5 - R$, $R_2 = 6 - R$). Прямая $U/I_3 = 4$ Ом пересекает кривую при $R \approx 2{,}59$ Ом; правее 5 Ом амперметр A_1 имел бы отрицательное сопротивление.

Обратите внимание: квадратное уравнение дало два корня, и оба формально решают систему; лишний отбрасывается только физикой — положительностью сопротивлений приборов.

Проверка. Подставим найденные сопротивления в третий опыт. Сопротивление пары амперметров

$$R_{12} = \frac{(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}41 \text{ Ом},$$

полное — $2{,}59 + 1{,}41 = 4$ Ом, ток $12/4 = 3$ А. Напряжение на паре $3 \cdot 1{,}41 \approx 4{,}24$ В, показания амперметров $4{,}24/2{,}41 \approx 1{,}76$ А и $4{,}24/3{,}41 \approx 1{,}24$ А; их сумма 3 А, как в условии (рисунок 4). Предел: если бы амперметры были идеальными ($R_1 = R_2 = 0$), все три тока были бы одинаковы, U/R; разница токов в опытах и говорит о сопротивлении приборов.



Проверка третьего опыта с найденными сопротивлениями: токи через амперметры 1,76 А и 1,24 А, в сумме 3 А.

Смысл: каждый амперметр «отбирает» часть напряжения; сравнение трёх токов позволяет исключить неизвестные сопротивления приборов и найти R, хотя ни один прибор не идеален.

Ответ. $R = 4 - \sqrt{2} \approx 2{,}59$ Ом.