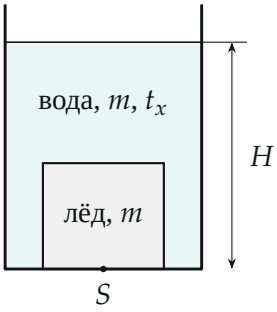
Лёд и вода в сосуде

Задача 5. [Курчатов 2024/25, 8 класс, задача 5] Экспериментатор Глюк проводил опыт с теплоизолированным цилиндрическим сосудом, в котором он зафиксировал на дне кусок льда при температуре $t_0 = 0\,^\circ\text{C}$. Затем он налил в сосуд воду так, что лёд оказался полностью под водой. Масса налитой воды в точности равна массе льда. Когда в сосуде установилось тепловое равновесие, Глюк заметил, что уровень воды опустился на $\alpha = 2{,}0\%$ относительно первоначального. Определите начальную температуру t_x налитой в сосуд воды. Плотность воды $\rho_0 = 1{,}0$ г/см^3, плотность льда $\rho = 0{,}9$ г/см^3, удельная теплоёмкость воды $c_в = 4{,}2$ кДж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг. Изменением объёма воды из-за теплового расширения, испарением воды пренебречь. Считайте, что теплоёмкость сосуда пренебрежимо мала по сравнению с теплоёмкостью воды и льда в сосуде. В ходе эксперимента лёд остаётся неподвижным на дне сосуда.



Поясняющий рисунок: лёд массы m закреплён на дне цилиндра с площадью дна S; сверху налита вода той же массы, уровень — H.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на тепловой баланс с проверкой гипотезы о конечном состоянии. Тёплая вода остывает, лёд тает; талая вода занимает меньший объём, чем лёд, поэтому уровень падает. Главная идея: по падению уровня узнаём, *сколько* льда растаяло, а по этому — сколько теплоты отдала вода. Сначала проверим, растаял ли лёд целиком, — от этого зависит конечная температура.

Обозначения. m — масса льда (и налитой воды); S — площадь дна; H — начальный уровень; Δm — масса растаявшего льда; ΔH — понижение уровня, $\alpha = \Delta H/H$.

1. Начальный уровень. Лёд целиком под водой, поэтому весь объём под уровнем H занят льдом и водой:

$$SH = \frac{m}{\rho} + \frac{m}{\rho_0} = m\,\frac{\rho_0 + \rho}{\rho_0 \rho}.$$

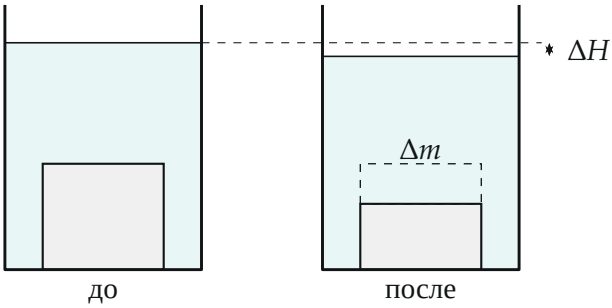
2. Уровень и растаявшая масса. Пусть растаяла масса Δm. Из льда ушёл объём $\Delta m/\rho$, а воды прибавилось $\Delta m/\rho_0$ (рисунок 2). Суммарный объём уменьшился на

$$S\,\Delta H = \frac{\Delta m}{\rho} - \frac{\Delta m}{\rho_0} = \Delta m\,\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 \rho}.$$

Делим на уравнение шага 1 — S и плотности в знаменателе сокращаются:

$$\alpha = \frac{\Delta H}{H} = \frac{\Delta m}{m} \cdot \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 + \rho}.$$

Падение уровня пропорционально растаявшей доле льда (рисунок 3).



До и после установления равновесия: растаявшая часть льда (пунктир, масса Δm) превратилась в воду меньшего объёма, уровень опустился на ΔH (по высоте ΔH увеличено для наглядности).

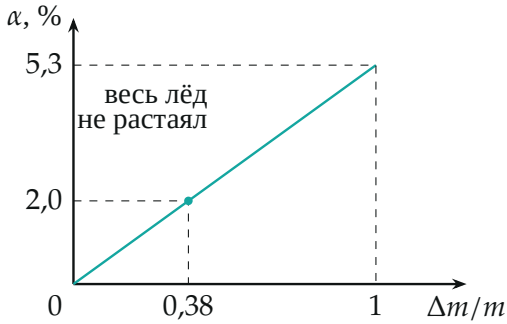
3. Растаял ли лёд целиком? Если бы растаял весь лёд, $\Delta m = m$,

уровень упал бы на

$$\alpha_0 = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 + \rho} = \frac{0{,}1}{1{,}9} \approx 5{,}3\%.$$

Наблюдали $2{,}0\% < \alpha_0$ — растаяла только часть льда. В сосуде остались лёд и вода в равновесии, значит, конечная температура равна $t_0 = 0\,^\circ\text{C}$. Растаявшая доля:

$$\frac{\Delta m}{m} = \alpha\,\frac{\rho_0 + \rho}{\rho_0 - \rho} = 0{,}02 \cdot 19 = 0{,}38.$$



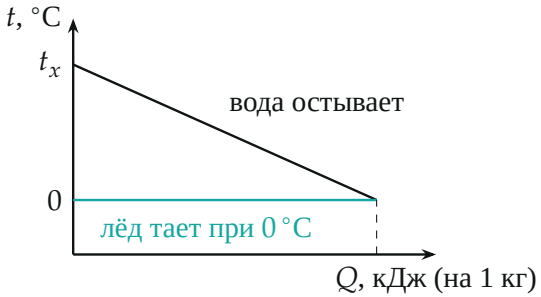
Падение уровня α пропорционально растаявшей доле льда. Предел — 5,3% при полном таянии; наблюдаемые 2,0% соответствуют доле 0,38.

4. Уравнение теплового баланса. Сосуд теплоизолирован, его теплоёмкость мала: теплота, отданная налитой водой при остывании от t_x до t_0, вся пошла на плавление Δm льда. Лёд был при $0\,^\circ\text{C}$, нагревать его не нужно, и талая вода остаётся при $0\,^\circ\text{C}$ (рисунок 4):

$$c_\text{в} m\,(t_x - t_0) = \lambda\,\Delta m.$$

Отсюда

$$t_x = t_0 + \frac{\lambda}{c_\text{в}} \cdot \frac{\Delta m}{m} = t_0 + \frac{\lambda}{c_\text{в}}\,\alpha\,\frac{\rho_0 + \rho}{\rho_0 - \rho} = 0 + \frac{330}{4{,}2} \cdot 0{,}38 \approx 29{,}9\,^\circ\text{C} \approx 30\,^\circ\text{C}.$$



Тепловой баланс на 1 кг льда и 1 кг воды: вода отдаёт $c_в t_x \approx 125$ кДж, остывая до нуля; столько же получает лёд и тает на 38%, оставаясь при 0 °C.

Обратите внимание: уравнение $c_в m(t_x - \theta) = \lambda m + c_в m(\theta - t_0)$ с неизвестной конечной температурой θ здесь неверно — оно предполагает, что растаял весь лёд. Поэтому сначала проверка по уровню, потом баланс.

Проверка. Размерность: кДж/кг, делённые на кДж/(кг·°C), дают °C. Самосогласованность: для полного таяния воде нужно было бы $t_x \geqslant \lambda/c_в \approx 79$ °C; у нас 30 °C меньше — лёд действительно растаял не весь, и предположение шага 3 верно. Предел: $\alpha \to 0$ даёт $t_x \to 0$ — холодная вода лёд не плавит.

Смысл: уровень воды работает как «весы» для растаявшего льда — по нему видно, сколько теплоты отдала вода.

Ответ. $t_x = t_0 + \dfrac{\lambda}{c_в}\alpha\dfrac{\rho_0 + \rho}{\rho_0 - \rho} \approx 30$ °C.